

Het gebruik van het boek of een rekenmachine of telefoon is niet toegestaan.  
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Bepaal het beeld onder de afbeelding  $w = z + z^{-1}$  van de cirkels  $|z| = R$  met  $R > 0$ .
2. Laat  $z = x + iy$  en beschouw onderstaande reële functies  $u(x, y)$  op het gepuncteerde complexe vlak  $\mathbb{C}^\times$

(a)  $u(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ ,

(b)  $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ .

Bestaat er een reële functie  $v(x, y)$  op  $\mathbb{C}^\times$  zodat  $w = u + iv$  holomorf is op  $\mathbb{C}^\times$ ? Zo nee, waarom niet. Zo ja, bepaal zo'n functie  $v(x, y)$ .

3. Bepaal de convergentie straal van de machtreeksen (met de som over  $n = 0, 1, 2, \dots$ )

(a)  $f(z) = \sum z^{n!}$ ,

(b)  $g(z) = \sum (n + 1 + 2^n)z^n$ .

Bepaal voor de reeks  $g(z)$  expliciet de som als rationale functie.

4. Herschrijf de functie  $f(z) = (z^2 - 2z + 5)/((z - 2)(z^2 + 1))$  met behulp van breuksplitsen. Bepaal de Laurent reeks van  $f(z)$  op de ring  $1 < |z| < 2$ . Bepaal het residue van  $f(z)$  voor  $z = 2$ .

5. Bereken de integraal

$$\int_0^\infty \frac{\log x \, dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0).$$