Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Complexe Functies

3 juli 2012, 8:30-11:30 uur, Linnaeus 4

Het gebruik van het boek of een rekenmachine of telefoon is niet toegestaan.
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Bepaal de punten in het complexe vlak waar de functie $f(z) = (z^2 + 1)\Re z$ holomorf is. Bereken in die punten de afgeleide $f'(z)$.

2. Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_n a_n z^n$ voor de gevallen dat
   (a) $a_n = n/3^n$
   (b) $a_n = (3 + (-1)^n)^n$

3. Zij $\sum_n a_n z^n$ de Laurent reeks rond $z = 0$ van de meromorfe functie $f(z) = 1/(e^z - 1)$ van de complexe variabele z.
   (a) Bereken de coefficienten a_n voor $n < 0$.
   (b) Bereken de coefficient a_0 en ga na dat $g(z) = f(z) - a_0$ een oneven functie in z is.
   (c) Bereken de coefficienten a_n voor $n = 1, 2$.
   (d) Bepaal de maximale straal $\rho > 0$ van de gepuncteerde schijf $\rho\mathbb{D}^\times$ waarop deze Laurent reeks convergeert.

4. Bereken de integraal
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)\; d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$
zowel voor $0 < a < 1$ als ook voor $a > 1$.

Tentamen CFT : 3 juli 2012

1. $f(z) = (z^2+1)\,\mathrm{Re}(z) = u+iv$, $u = x(x^2-y^2+1)$, $v = 2x^2y$

$u_x = 3x^2-y^2+1$, $u_y = -2xy$, $v_x = 4xy$, $v_y = 2x^2$

CR : $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$u_y = -v_x \Rightarrow 2xy = 4xy \Rightarrow x=0$ of $y=0$ — $x=0,\ y=\pm 1$

$u_x = v_y \Rightarrow 3x^2-y^2+1 = 2x^2 \Rightarrow x^2-y^2+1=0$ — $y=0,\ x^2+1=0$ ↯

dus holo voor $z=\pm i$, $f'(\pm i) = u_x + i v_x|_{(0,\pm 1)} = 0$

2. $\sum_0^\infty a_n z^n$, bepaal R

a. $a_n = \frac{n}{3^n}$, $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$

b. $a_n = (3+(-1)^n)^n$ = $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4$, $R = \frac{1}{4}$

3. $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ Laurent reeks rond $z=0$

a. $\lim_{z\to 0} z f(z) = 1 \Rightarrow a_n = 0$ voor $n \le -2$, $a_{-1} = 1$

b. $f(z) + \frac{1}{2} = \dfrac{e^z+1}{2(e^z-1)} = \dfrac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{2(e^{z/2}-e^{-z/2})}$ oneven functie

$\Rightarrow a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_n = 0$ voor $n = 2,4,6,\dots$

c. $f(z) = \dfrac{1}{z+z^2/2+z^3/6+\dots} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+z/2+z^2/6+\dots} =$

$\frac{1}{z}\{1-(z/2+z^2/6+\dots) + (z/2+z^2/6+\dots)^2+\dots\} =$

$\frac{1}{z}\{1-\frac{z}{2}+(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})z^2+\dots\} = \frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}z+\dots$

$a_{-1}=1, a_0=-\frac{1}{2}, a_1=\frac{1}{12},\dots$ en $a_2=0$ vanwege b.

4 Bereken $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)\,d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{(z^2+z^{-2})/2}{1-a(z+z^{-1})+a^2}\cdot -i\frac{dz}{z}}$

$z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$, $d\theta = -i\frac{dz}{z}$

$f(z) = \dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{(z^2+z^{-2})}{(1-az)(1-az^{-1})z}$

Residuen van: $g(z) = \dfrac{(z^2+z^{-2})}{(1-az)(1-az^{-1})z} = \dfrac{z^4+1}{(1-az)(z-a)z^2}$

$z=0$: 2-voudige pool.

$g(z) = \dfrac{z^4+1}{(1-az)(z-a)z^2}$ pool van orde 2

$$(z^2 g(z))'(z=0) = \frac{3z^3(1-az)(z-a) - (z^4+1)(-2az+(1+a^2))}{((1-az)(z-a))^2}\bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{-(1+a^2)}{+a^2} = -\frac{1+a^2}{a^2}$$

$z=a$: enkelv. pool, residue: $\dfrac{a^2+a^{-2}}{(1-a^2)}$

$z=a^{-1}$: enkelv. pool, residue: $\dfrac{a^2+a^{-2}}{-a(1-a^2)a^{-1}} = \dfrac{a^2+a^{-2}}{(a^2-1)}$

$0<a<1$: $-\dfrac{1+a^2}{a^2} + \dfrac{a^2+a^{-2}}{(1-a^2)} = \dfrac{a^4+1-1+a^4}{a^2(1-a^2)} = \dfrac{2a^2}{(1-a^2)} \Rightarrow \text{Int} = \pi \times$

$a>1$: $-\dfrac{1+a^2}{a^2} + \dfrac{a^2+a^{-2}}{(a^2-1)} = \dfrac{a^4+1-(a^4-1)}{a^2(a^2-1)} = \dfrac{2}{a^2(a^2-1)} \Rightarrow \text{Int} = \pi \times$

NB: Als $a \mapsto a^{-1}$, dan $I \longmapsto a^2 I$

Dit klopt want $\dfrac{2a^2}{1-a^2} \longmapsto \dfrac{2/a^2}{1-1/a^2} = a^2 \cdot \dfrac{2}{a^2(a^2-1)}$

$\dfrac{2}{a^2(a^2-1)} \longmapsto \dfrac{2a^2}{1/a^2-1} = a^2 \cdot \dfrac{2a^2}{(a^2-1)}$

mbv residuenstelling $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ binnen} \\ \gamma \text{ pool van } f}} \operatorname{Res} f(z)\big|_{z=z_i}$