Radboud Universiteit Nijmegen

Proeftentamen Calculus 2 NWI-NP004B
3 uur

Het gebruik van een rekenmachine, telefoon en boek(en) is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. (i) Veronderstel dat a een reël getal en $b > 0$. Laat zien dat

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{b\sin(bx) + a\cos(bx)}{a^2 + b^2}\, e^{ax}$$

(ii) Beschouw nu de oneigenlijk integraal $\int_0^\infty e^{ax} \cos(bx)\, dx$. Voor welke waarden van a en b is deze integraal convergent?

(iii) Beschouw nu de oneigenlijk integraal $\int_{-\infty}^\infty e^{ax} \cos(bx)\, dx$. Voor welke waarden van a en b is deze integraal convergent?

2. Bekijk een driehoek met hoekpunt $(R, -r)$, (R, r), $(R + r, 0)$ waarbij R en r positieve getallen zijn. We wentelen de driehoek om de y-as, waardoor een 3-dimensionale figuur V ontstaat.

(i) Bepaal het volume Vol van V.

(ii) Bepaal het oppervlak van de rand van V.

(iii) Wat is de afgeleide van Vol gezien als functie van r?

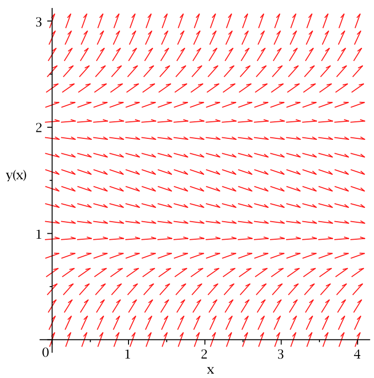
3. Bepaal van de volgende reeksen of ze absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + 2n}{6n^3 + n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

Geef bij de tweede reeks aan voor welke $x \in \mathbb{R}$ deze eigenschappen met betrekking tot convergentie.

4. Bepaal de lengte van de hyperboloïde $(x(t), y(t)) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ voor $t \in [0, 2\pi]$.

5. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.



6. De eerste orde differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx}(x) = y^2(x) - 3y(x) + 2$$

heeft een richtingenveld als hiernaast.

(i) Voor welke waarden van C is $y(x) = C$ een constante oplossing van de differentiaalvergelijking?

(ii) Kies (een van) de constante(s) C als in (i). Veronderstel $\varepsilon \neq 0$ is een klein getal, en bekijk de oplossing van de differentiaalvergelijking met beginwaarde $y(0) = C + \varepsilon$. Wat kunt u zeggen over $\lim_{x\to\infty} y(x)$ van deze oplossing?

(iii) Los deze differentiaalvergelijking op.

7. (i) Geef de Taylorreeks ontwikkeling van $\sin(x)$ rond $x = \pi$.

(ii) Geef het Taylorpolynoom van $\tan(x)$ rond $x = \pi$ van graad 3.

(iii) Bepaal $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin(x) + x - \pi}{\tan(x) - x + \pi}$

8. [1] We beschouwen de differentiaalvergelijking $xy''(x) + (\frac{1}{2} - x)y'(x) - y(x) = 0$.

(i) Veronderstel dat we een oplossing van de vorm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hebben. Bepaal een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n.

(ii) Bepaal de expliciete oplossing van deze machtreeksontwikkeling, en de convergentiestraal van deze machtreeks.

(iii) Neem nu ook aan dat er een oplossing van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{r+n}$ voor een vast reëel getal r.

(iv) Vul de machtreeks van (iii) in, en laat bekijk de coëfficiënt van x^{r-1}. Concludeer dat $r = 0$ of $r = \frac{1}{2}$.

(v) Neem aan dat $r = \frac{1}{2}$. Bepaal de recurrente betrekking voor de coëfficiënten b_n, en bepaal de bijbehorende convergentiestraal.

Normering										
Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	Gratis	Totaal
Punten	10	10	15	10	10	10	10	15	10	100

[1] Voor deze opgave scoort u minimaal $H \cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ is.

Het onafgeronde tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10, daarna volgt de gebruikelijke afronding op gehelen.

Antwoorden: deels[2]

1. (i) Twee keer partieel integreren en herschrijven
   (ii) $a < 0$ en b willekeuring
   (iii) Altijd divergent
2. (i) $\frac{2}{3}\pi(3Rr^2 + r^3)$
   (ii) $4\pi(1+\sqrt{2})rR + 2\pi\sqrt{2}\,r^2$
   (iii) $2\pi(2Rr + r^2)$
3. Divergent, absoluut convergent voor elke x, divergent.
4. 8
5. $y(x) = e^{-x}(3\sin(x) + 1)$
6. (i) $C = 1$, $C = 2$
   (ii) Voor $C = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$. Voor $C = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$. Voor $C = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$. Voor $C = 2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.
   (iii) $y(x) = \frac{2-Ce^x}{1-Ce^x}$
7. (i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}$
   (ii) $x - pi + \frac{1}{3}(x-\pi)^3$
   (iii) $\frac{1}{2}$
8. (i) $(n+1)(n+\frac{1}{2})a_{n+1} - (n+1)a_n = 0$
   (ii) $a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}}$, $R = \infty$
   (iii) doen
   (iv) $r(r-1)b_0 + \frac{1}{2}rb_0 = 0$. (Omdat $b_0 \neq 0$ (anders hadden we een andere r genomen))
   (v) $R = \infty$, $b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$

[2] Modulo rekenfouten