Tentamen - Calculus 4, 14 juni 2017, 8:30 - 11:30

Enkele opmerkingen:

-Je mag geen gebruik maken van boeken, notities, notitieboekjes, mobiele telefoons, tablets, etc.

-Als je de ruimte tijdelijk verlaat, geef dan a.j.b. je mobiele telefoon aan de surveillanten.

-Je mag het tentamen zowel in het Engels als in het Nederlands maken.

-Vergeet niet je naam en studentnummer te noteren op elk blad dat je inlevert.

-Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.

-Je mag de formules gebruiken: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$, $1 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$.

Opgave 1. *15pnt.* Zij D het gebied in $\mathbb{R}^3$ beschreven door de ongelijkheden:

$$0 \le x^2 \le y \le z^2 \le x \le z.$$

Bereken

$$\iiint_D \frac{20}{z-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Opgave 2. *25pnt.* Zij A het gebied in het (x,y)-vlak gegeven door de ongelijkheden:

$$0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 1 - x^2 + x.$$

Beschouw de coördinatentransformatie:

$$x = v, \quad y = u^2 + v, \ u \ge 0.$$

Zij B het gebied in het (u,v)-vlak dat correspondeert met A onder de bovenstaande coördinatentransformatie.

a) Maak een schets van de gebieden A en B.

b) Bereken het oppervlakte-element $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in de (u,v) coördinaten.

c) Bereken de integraal:

$$\iint_A \sqrt{y-x}\,e^{(y+x^2-x)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Opgave 3. *25pnt.* Zij D het gebied in $\mathbb{R}^3$ beschreven door de ongelijkheid $R \le \sin(\phi)$, die in bolcoördinaten wordt gegeven:

$$x = R\sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = \sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = R\cos(\phi),$$
$$0 \le R, \quad 0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Beschouw het vectorveld:

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

a) Maak een schets van D.

b) Controleer de Divergentiestelling voor $\mathbf{F}$ op D door **beide** zijden van de vergelijking in de stelling te berekenen.

Opgave 4. *35pts.* Zij $\mathcal{S}$ het deel van de cilinder $x^2 + y^2 = 1$ dat tussen de vlakken $z = x$ en $z = 2$ ligt:

$$\mathcal{S}: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x \le z \le 2.$$

Het deel van de rand van $\mathcal{S}$ dat in het vlak $z = 2$ ligt noemen we $\mathcal{C}_1$, en het deel dat in het vlak $z = x$ ligt, $\mathcal{C}_2$. We oriënteren $\mathcal{S}$ zó dat de binnenzijde van de cilinder de negatieve zijde van $\mathcal{S}$ is. Geef $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ de geïnduceerde oriëntatie van $\mathcal{S}$. Beschouw het vectorveld

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

a) Maak een schets van $\mathcal{S}$. Geef op de tekening de oriëntaties van $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ aan.

b) Bereken $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$.

c) Vind de flux van $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$ die door $\mathcal{S}$ stroomt, door een directe berekening:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\mathrm{d}S.$$

d) Bereken de kringintegraal van $\mathbf{F}$ op $\mathcal{C}_1$:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} yz\ \mathrm{d}x - xz\ \mathrm{d}y + xy\ \mathrm{d}z.$$

e) Bereken de kringintegraal van $\mathbf{F}$ op $\mathcal{C}_2$ met hulp van de stelling van Stokes voor $\mathcal{S}$.

Exam - Calculus 4, June 14 2017, 8:30 - 11:30

Some remarks:

-You are not allowed to use books, notes, notebooks, mobile phones, tablets, etc.

-When you are leaving temporarily the room, please hand in your mobile phone to the supervisors.

-You may write in English or in Dutch.

-Don't forget to write your name and your student number on each sheet of paper you are handing in.

-For each answer, explain how you obtained it.

-You may use the formulas: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$, $1 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$.

Problem 1. *15pts.* Let D be the domain in $\mathbb{R}^3$ described by the inequalities:

$$0 \leq x^2 \leq y \leq z^2 \leq x \leq z.$$

Calculate

$$\iiint_D \frac{20}{z-x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Problem 2. *25pts.* Let A be the region in the (x, y)-plane given by the inequalities:

$$0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 1 - x^2 + x.$$

Consider the change of coordinates:

$$x = v, \quad y = u^2 + v, \ u \geq 0.$$

Let B be the region in the (u, v)-plane which corresponds to A under the above change of coordinates.

a) Make a sketch of the regions A and B.

b) Calculate the area element $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in the (u, v) coordinates.

c) Calculate the integral:

$$\iint_A \sqrt{y-x}\, e^{(y+x^2-x)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Problem 3. *25pts.* Let D be the domain in $\mathbb{R}^3$ described by the inequality $R \leq \sin(\phi)$, where spherical coordinates where used:

$$x = R\sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = \sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = R\cos(\phi),$$
$$0 \leq R, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Consider the vector field:

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

a) Draw a sketch of D.

b) Verify the Divergence Theorem for $\mathbf{F}$ on D by calculating **both** sides of the equality in the theorem.

Problem 4. *35pts.* Let $\mathcal{S}$ be the region of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ that lies between the planes $z = x$ and $z = 2$:

$$\mathcal{S}: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x \leq z \leq 2.$$

Let $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ be the components of the boundary of $\mathcal{S}$ which lie in the planes $z = 2$ and $z = x$, respectively. We orient $\mathcal{S}$ such that the interior of the cylinder is the negative side of $\mathcal{S}$. Put on $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ the induced orientation from $\mathcal{S}$. Consider the vector field

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

a) Draw a sketch of $\mathcal{S}$. Indicate on the picture the orientations of $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$.

b) Calculate $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$.

c) Find the flux of $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$ across $\mathcal{S}$ by a direct calculation:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\mathrm{d}S.$$

d) Calculate the circulation of $\mathbf{F}$ on $\mathcal{C}_1$:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} yz \ \mathrm{d}x - xz \ \mathrm{d}y + xy \ \mathrm{d}z.$$

e) Find the circulation of $\mathbf{F}$ on $\mathcal{C}_2$ by using Stokes' Theorem for $\mathcal{S}$.