Calculus 3. Tentamen Calculus 3, 8 April 2011

Opgave 1. Zij $f(x, y, z) = xy^2z - 3xz$ en $g(x, y, z) = x^3 + z\ \sin(y) - y^2\sin(z)$.
i) (5 pnt) Laat zien dat $p = (0, 1, 1)$ op de oppervlakken $\{f(x, y, z)\} = 0$ en $\{g(x, y, z)\} = 0$ ligt en bereken de gradienten van f te p en van g te p.
ii) (5 pnt) Bereken de hoek die de vlakken $\{f(x, y, z)\} = 0$ en $\{g(x, y, z)\} = 0$ te p met elkaar maken.

Opgave 2. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de functie gegeven door

$$f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$$

(10 pnt) Bepaal alle punten waar deze functie een relatief extreem of een zadelpunt heeft.

Opgave 3. Zij D het gebied gegeven door

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 10 \text{ en } y^2 \leq -10x + 10\,\}$$

Zij $f : D \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$.
i) (3 pnt) Laat zien dat f op D een maximum en een minimum aanneemt.
ii) (7 pnt) Bereken in welke punten van D f het maximum en het minimum aanneemt en bereken de waarde van f in die punten.
[Aanwijzing: maak een tekening]

Opgave 4. i) (5 pnt) Zij $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ de kromme gegeven door

$$c(t) = (e^{2t}\cos(2t), 2, e^{2t}\sin(2t))$$

Bereken de lengte van deze kromme.
ii) (5 pnt) Zij $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gegeven door

$$F(x, y, z) = (yz + 2xy, xz + z^2 + x^2, xy + 3z^2 + 2yz)$$

Laat zien dat F een gradientvectorveld is.

Uitwerking wc8 =tentamen Calculus 3, 8 April 2011

Opgave 1. Zij $f(x,y,z) = xy^2z - 3xz$ en $g(x,y,z) = x^3 + z\ \sin(y) - y^2\sin(z)$.
i) (5 pnt) Laat zien dat $p = (0,1,1)$ op de oppervlakken $\{f(x,y,z)\} = 0$ en $\{g(x,y,z)\} = 0$ ligt en bereken de gradienten van f te p en van g te p.
ii) (5 pnt) Bereken de hoek die de vlakken $\{f(x,y,z)\} = 0$ en $\{g(x,y,z)\} = 0$ te p met elkaar maken.

Oplossing. i) Zij $p = (0,1,1)$. Dan $f(p) = 0 - 0 = 0$ en $g(p) = 0 + sin(1) - sin(1) = 0$

$$grad(f)(p) = \begin{pmatrix} y^2z - 3z \\ 2xyz \\ xy^2 - 3x \end{pmatrix}_{(0,1,1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$grad(g)(p) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ zcos(y) - 2ysin(z) \\ sin(y) - y^2cos(z) \end{pmatrix}_{(0,1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

ii)

$$\langle grad(f)(p), grad(g)(p)\rangle = \langle(-2,0,0),(0,*,*)\rangle = 0$$

Dus de gevraagde hoek is 90 graden.

Opgave 2. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$f(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$$

(10 pnt) Bepaal alle punten waar deze functie een relatief extreem of een zadelpunt heeft en beschrijf de aard van ieder van deze punten.

Oplossing. We bepalen eerst de kandidaat punten van $\mathbb{R}^2$ waar f een locaal extreem kan hebben. In die punten moeten beide partiële afgeleiden nul zijn. Dus moet gelden

$$f_x = 2y - 2x^3 = 0 \text{ en } f_y = 2x - 2y^3 = 0$$

Uit $f_x = 0$ volgt $y = x^3$ en uit $f_y = 0$ volgt $x = y^3$. Uit beiden volgt dan $x = x^9$. Dus $(x^8 - 1)x = 0$. Dus $(x^4 - 1)(x^4 + 1)x = 0$. Dus $x = 0$ of $x^4 = 1$. Dus $x = 0$ of $x = 1$ of $x = -1$. Omdat $y = x^3$ vinden we dan de volgende drie punten: $(0,0)$, $(1,1)$ en $(-1,-1)$.

We gebruiken nu de Hessematrix H om na te gaan of deze punten locale maxima, minima of zadelpunten zijn.

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x^2 & 2 \\ 2 & -6y^2 \end{pmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Omdat het element in de linkerbovenhoek van $H(0,0) = 0$ en det $H(0,0) = -4 \neq 0$ is $(0,0)$ een *zadelpunt*. Verder geldt

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Het element in de linkerbovenhoek van $H(1,1) = -6 < 0$ en det $H(1,1) = 32 > 0$. Dus we zien het tekenpatroon $-,+$, waaruit volgt dat $(1,1)$ een *locaal maximum* is. Omdat

$$H(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

zien we dat $H(-1,-1) = H(1,1)$. Dus is ook $(-1,-1)$ een *locaal maximum* van f.

Opgave 3. Zij D het gebied gegeven door

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 10 \text{ en } y^2 \leq -10x + 10\,\}$$

Zij $f : D \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$.
i) (3 pnt) Laat zien dat f op D een maximum en een minimum aanneemt.
ii) (7 pnt) Bereken in welke punten van D f het maximum en het minimum aanneemt en bereken de waarde van f in die punten.
[Aanwijzing: maak een tekening]

Oplossing. i) f is een veeltermfunctie, dus continu op $\mathbb{R}^2$ en dus continu op D. Verder is D begrensd want D is bevat in de cirkel met straal $\sqrt{10}$. Ook is D een gesloten verzameling van $\mathbb{R}^2$, want

$$D\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - 10 \leq 0 \text{ en } y^2 + 10x - 10 \leq 0\,\}$$

en de functies $x^2 + y^2 - 10$ en $y^2 + 10x - 10$ zijn continu op $\mathbb{R}^2$ (want het zijn veelterm functies). Uit een stelling volgt dan dat f op D een globaal

maximum en een globaal minimum heeft.
ii) Eerst bepalen we de kandidaat punten in het inwendige van D waar f een extreem kan hebben. Dan moet gelden $f_x = 0$ en $f_y = 0$. Dus $2x - 2 = 0$ en $4y = 0$. Dus we vinden het punt $(1, 0)$ en $f(1, 0) = 2$.
Nu bepalen we de kandidaat extreem punten op de cirkelrand $g(x, y) := x^2 + y^2 - 10 = 0$. Merk op dat

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Dus als $\nabla g(x, y) = 0$, dan $(x, y) = (0, 0)$ en dit punt ligt niet op de cirkelrand $g(x, y) = 0$. Dus $\nabla g(x, y) \neq 0$ voor alle punten (x, y) die voldoen aan $g(x, y) = 0$. Uit de stelling van Lagrange volgt dan: als f een extreem heeft in een punt (x_0, y_0) op de rand $g(x, y) = 0$, dan bestaat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ zodat $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ en $g(x_0, y_0) = 0$. Met andere woorden

$$\begin{pmatrix} 2x_0 - 2 \\ 4y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \text{ en } x_0^2 + y_0^2 = 10$$

Dus $4y_0 = \lambda 2y_0$. Dus $y_0(4 - 2\lambda) = 0$. Dus $y_0 = 0$ of $y_0 \neq 0$ en $\lambda = 2$.
Als $y_0 = 0$ dan $x_0^2 = 10$ dus twee punten, namelijk $(\sqrt{10}, 0)$ en $(-\sqrt{10}, 0)$. Het eerste punt ligt niet in D omdat niet is voldaan aan de voorwaarde $y^2 \leq -10x + 10$. Voor het tweede punt geldt $f(-\sqrt{1,0}) = 10 + 2\sqrt{10} + 3$.
Als $y_0 \neq 0$ en $\lambda = 2$ dan $2x_0 - 2 = 4x_0$, dus $x_0 = -1$ en met $x_0^2 + y_0^2 = 10$ volgt dan dat $y_0 = 3$ of $y_0 = -3$. Dus we vinde twee punten: $(-1, 3)$ en $(-1, -3)$ en er geldt $f(-1, 3) = 24$ en $f(-1, -3) = 24$.
Tenslotte bekijken we de kandidaat extremen op de parabool $y^2 + 10x - 10 = 0$. Met Lagrange vinden we dan: als f in een punt (x_0, y_0) van deze parabool een extreem heeft dan geldt: er bestaat een $\lambda \in \mathbb{R}$ zodat

$$\begin{pmatrix} 2x_0 - 2 \\ 4y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \text{ en } y_0^2 = -10x_0 + 10$$

Uit $4y_0 = \lambda 2y_0$ volgt $y_0 = 0$ of $y_0 \neq 0$ en $\lambda = 2$. Als $y_0 = 0$ volgt $10x_0 = 10$ en dus $x_0 = 1$. We vinden dan het punt $(1, 0)$ en $f(1, 0) = 2$. Tenslotte, als $y_0 \neq 0$ en $\lambda = 2$ dan $2x_0 - 2 = 20$ en dus $x_0 = 11$. Maar zo'n punt ligt niet binnen de cirkel met straal $\sqrt{10}$ en ligt dus buiten D.
Uit alle bovenstaande punten zien we dan dat f op D zijn maximum aanneemt in de punten $(-1, 3)$ en $(-1, -3)$. Dit maximum is $f(-1, 3) = 24$. Het minimum neemt f op D aan in het punt $(1, 0)$ en $f(1, 0) = 2$.

Opgave 4. i) (5 pnt) Zij $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ de kromme gegeven door

$$c(t) = (e^{2t}\cos(2t), 2, e^{2t}\sin(2t))$$

Bereken de lengte van deze kromme.
ii) (5 pnt) Zij $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gegeven door

$$F(x,y,z) = (yz + 2xy, xz + z^2 + x^2, xy + 3z^2 + 2yz)$$

Laat zien dat F een gradientvectorveld is.

Oplossing. $c'(t) = (e^{2t}cos(2t), 2, e^{2t}sin(2t))$. Dus

$$||c'(t)||^2 = 4e^{4t}cos^2(2t) + 4e^{4t}sin^2(2t) - 8e^{4t}cos(2t)sin(2t)+$$
$$4e^{4t}sin^2(2t) + 4e^{4t}cos^2(2t) + 8e^{4t}cos(2t)sin(2t) = 8e^{4t} = (2\sqrt{2}e^{2t})^2$$

Dus de gevraagde booglengte is

$$\int_0^1 2\sqrt{2}e^{2t}dt = [\sqrt{2}e^{2t}]_0^1 = \sqrt{2}e^2 - \sqrt{2}$$

ii) Manier 1. Bepaal f zodat $F = \nabla f$, met andere woorden zoek f zodat $(f_x, f_y, f_z) = F$. Om te beginnen moet dan gelden dat $f_x = yz + 2xy$. Dus $f = xyz + x^2y + c(y,z)$. Omdat ook moet gelden $f_y = xz + z^2 + x^2$ moet dus gelden dat $xz + x^2 + c_y(y,z) = xz + z^2 + x^2$. Dus moet gelden $c_y(y,z) = z^2$, waaruit volgt dat $c(y,z) = yz^2 + d(z)$. Dus $f = xyz + x^2y + yz^2 + d(z)$. Tenslotte gebruik dat $f_z = xy + 3z^2 + 2yz$. Hieruit volgt dat $xy + 2yz + d'(z) = xy + 2yz + 3z^2$. Dus $d'(z) = 3z^2$, waaruit volgt dat $d(z) = z^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Samengevat: neem $f = xyz + x^2y + yz^2 + z^3$. Dan geldt $F = \nabla f$ en dus is F een gradient vectorveld.
Manier 2. $\mathbb{R}^3$ is convex. Het is dus noodzakelijk en voldoende te bewijzen dat $\nabla \times F = 0$. Welnu,

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} =$$
$$(\partial_y F_3 - \partial_z F_2, -(\partial_x F_3 - \partial_z F_1), \partial_x F_2 - \partial_y F_1)$$

$$\partial_y F_3 - \partial_z F_2 = (x + 2z) - (x + 2z) = 0$$
$$\partial_x F_3 - \partial_z F_1 = y - y = 0$$
$$\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = (z + 2x) - (z + 2x) = 0$$

Dus $\nabla \times F = 0$ en dus is F een gradient vectorveld.