Tentamen Discrete Wiskunde 1

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Opgave 1. (8 punten)
Zij a_n het maximale aantal gebieden waarin het vlak door n rechte lijnen onderverdeeld kan worden (dus $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$).

(i) Vind een recursieve formule voor a_n.

Hint: Hoeveel nieuwe gebieden onstaan maximaal door het toevoegen van de n-de lijn?

(ii) Bepaal een expliciete formule voor a_n (alleen maar afhankelijk van n).

Opgave 2. (13 punten)
Een rij $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ heet een partitie van n als $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ en $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$. Het n-de Bell getal $B(n)$ geeft het aantal partities van n aan (met de afspraak $B(0) = 1$).
Met $M(n, r)$ noteren we het aantal partities van n waarvoor het kleinste element (dus a_1) gelijk is aan r. Voor $r > n$ is natuurlijk $M(n, r) = 0$.
Het is duidelijk dat $B(n) = \sum_{r=1}^{n} M(n, r)$ geldt.

(i) Laat zien dat $M(n, n) = 1$, $M(n, r) = 0$ voor $\frac{n}{2} < r < n$ en toon aan dat $M(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = 1$ voor $n \geq 4$ (waarbij $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal $\leq x$ is).

(ii) Laat zien: $M(n, r)$ voldoet aan de recursie

$$M(n,r) = \begin{cases} 1 & \text{als } r = n \\ \sum_{l \geq r} M(n-r, l) & \text{als } r < n. \end{cases}$$

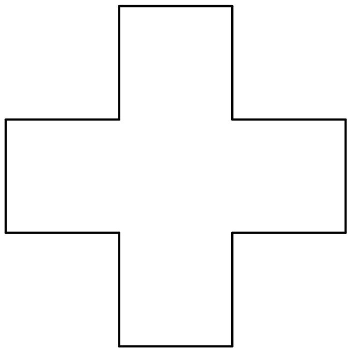
(iii) Laat zien: $M(n, r)$ voldoet aan de recursie

$$M(n,r) = \begin{cases} B(n-1) & \text{als } r = 1 \\ M(n-1, r-1) - M(n-r, r-1) & \text{als } r \geq 2. \end{cases}$$

In het bijzonder is dus $M(n, 2) = B(n-2) - B(n-3)$.

(iv) Maak (met behulp van de delen (i) t/m (iii)) een tabel van de waarden van $M(n, k)$ voor $1 \leq n, k \leq 10$.

Opgave 3. (14 punten)
Een internationale hulporganisatie kiest als symbool een regelmatig kruis, waarbij ieder van de twaalf lijnstukken van de rand met een van de vier kleuren rood, groen, geel en blauw ingekleurd moet worden.



Twee kleuringen worden als equivalent beschouwd als ze door een draaiing of spiegeling van het kruis in elkaar getransformeerd worden.

(i) Laat zien dat de groep die door draaiingen en spiegelingen van het kruis op de lijnstukken van de rand werkt het cykel index polynoom

$$\frac{1}{8}X_1^{12} + \frac{1}{4}X_1^2X_2^5 + \frac{3}{8}X_2^6 + \frac{1}{4}X_4^3$$

heeft.

(ii) Hoeveel kleuringen van de rand van het kruis zijn er (tot op equivalentie na) met de aangegeven vier kleuren?

(iii) Hoeveel kleuringen zijn er (tot op equivalentie na), waarbij de kleur rood precies drie keer voorkomt?

(iv) Hoeveel kleuringen zijn er (tot op equivalentie na), waarbij alle vier kleuren telkens drie keer voorkomen?

Opgave 4. (11 punten)
Zij T een boom met $|V(T)| > 1$ knopen. Met $\deg(v)$ noteren we de graad van een knoop. Een knoop van graad 1 heet een *blad.*

(i) Bewijs dat T minstens twee bladeren heeft.

(ii) Zij d de maximale graad van een knoop in T. Bewijs dat T minstens d bladeren heeft.

(iii) Bewijs dat het aantal bladeren in T gelijk is aan

$$2 + \sum_{\deg(v) \geq 3} (\deg(v) - 2)$$

waarbij de som over alle knopen van graad minstens 3 loopt.

Succes ermee!