Tentamen Discrete Wiskunde 1

- *Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.*
- *Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat.*
- *Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!*

Opgave 1. (8 punten)
Zij K_4 de volledige graaf op 4 punten. We noteren met a_n het aantal wandelingen van lengte n (dus met n kanten) tussen twee *verschillende* punten van K_4. Merk op dat a_n niet van de keuze van de twee punten afhangt. Bijvoorbeeld is $a_3 = 7$, de wandelingen tussen de punten A en B zijn $ABAB$, $ABCB$, $ABDB$, $ACAB$, $ACDB$, $ADAB$, $ADCB$.

(i) Laat zien dat de rij (a_n) aan de recursie

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

voldoet met $a_1 = 1$ en $a_2 = 2$.

(ii) Bepaal een expliciete formule voor a_n.

Opgave 2. (10 punten)
Voor $n \in \mathbb{N}$ zij $P(n)$ de verzameling permutaties π op de $2n$ punten $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, zo dat $\pi(i) + \pi(i+1) \neq 2n + 1$ voor alle $i = 1, 2, \ldots, 2n - 1$.

(i) Bepaal de elementen uit $P(n)$ voor $n = 1$ en $n = 2$.

(ii) Zij $1 \leq i < j \leq 2n - 1$.
Wat is het aantal $\pi \in S_{2n}$ met $\pi(i) + \pi(i+1) = 2n + 1$?
Wat is het aantal $\pi \in S_{2n}$ met $\pi(i) + \pi(i+1) = 2n + 1$ en $\pi(j) + \pi(j+1) = 2n + 1$?

(iii) Laat zien dat het aantal elementen $|P(n)|$ in $P(n)$ gelijk is aan

$$|P(n)| = \sum_{m=0}^{n} (-2)^m \cdot (2n - m)! \cdot \binom{n}{m}.$$

(Hint: Gebruik het principe van inclusie/exclusie.)

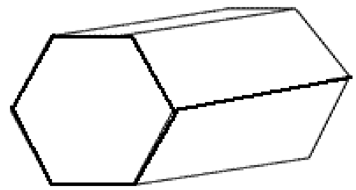
Opgave 3. (7 punten)
Zij $m \in \mathbb{N}$ en zij T een boom met de eigenschap dat T voor iedere d met $2 \leq d \leq m$ precies een knoop van graad d bevat en alle andere knopen van T graad 1 hebben.

(i) Bepaal het aantal knopen van T.

(ii) Bewijs dat er voor iedere $m \geq 1$ zo'n boom bestaat (door bijvoorbeeld een algemene constructiemethode aan te geven).

(iii) Geef voor $m = 6$ twee niet-isomorfe bomen met deze eigenschap aan.

Opgave 4. (11 punten)
Zij G de rotatiegroep van een regelmatig zeszijdig recht prisma. Dan werkt G op de kleuringen van de acht zijvlakken van het prisma en twee kleuringen worden alleen maar als verschillend beschouwd als ze niet in dezelfde baan onder deze werking liggen.



(i) Bepaal het cykel index polynoom Z_G voor de werking van G op de zijvlakken van het prisma.

(Hint: De rotatiegroep heeft orde 12 (en bevat geen spiegelingen).)

(ii) Hoeveel verschillende kleuringen van het prisma zijn er met r kleuren?

(iii) Hoeveel verschillende kleuringen met twee kleuren zijn er en bij hoeveel van deze kleuringen komen beide kleuren telkens vier keer voor?

(iv) Bij een kleuring met twee kleuren kan een verwisseling van de kleuren een kleuring in dezelfde of in een andere baan opleveren.

Bepaal het aantal verschillende kleuringen waarbij verwisselen van de kleuren een kleuring in dezelfde baan oplevert en maak voor ieder van deze gevallen een schets van een voorbeeld.

Opgave 5. (7 punten)
Een graaf G heeft als knopen de hokjes van een 3×3 matrix. Twee van deze hokjes zijn door een kant verbonden dan en slechts dan als ze horizontaal, verticaal of diagonaal aan elkaar grenzen.

(i) Teken de graaf G, geef aan hoeveel kanten G heeft en wat de graden van de knopen zijn.

(ii) Stel dat de kant tussen de hokjes (i, j) en (k, l) gewicht $|i - k| + |j - l|$ heeft.

Bepaal een minimale opspannende boom van G en een Hamilton cykel van minimaal gewicht (dus een oplossing van het travelling salesman probleem). Bewijs dat je Hamilton cykel inderdaad minimaal gewicht heeft.

(iii) Geef twee Hamilton cykels (niet noodzakelijk van minimaal gewicht) aan die *essentiëel verschillend* zijn. Hiermee is bedoeld, dat de ene niet uit de andere verkregen wordt door de cykel te spiegelen of te draaien (en natuurlijk ook niet door andersom te lopen of op een ander punt te beginnen).

Succes ermee!