

Tentamen Discrete Wiskunde 1

10 april 2012, 14:00–17:00 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Onderbouw je antwoorden, met een goede argumentatie zijn ook punten te verdienen.
- Veel succes!

Opgave 1. (3 punten)

Gegeven zijn dertig ballen en vier dozen. De ballen zijn niet te onderscheiden maar de dozen wel, die noemen we A, B, C en D . We willen de ballen over de dozen verdelen, zodat

- in doos A zitten minstens 10 ballen;
- in dozen B en C samen zitten hoogstens 17 ballen.

Op hoeveel manieren kan dit?

Opgave 2. (4 punten)

Zij G een simpele graaf. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn.

- (1) G is een boom.
- (2) G heeft geen gesloten paden, maar als je een nieuwe kant toevoegt tussen twee al aanwezige knopen, dan ontstaat er een gesloten pad.

Opgave 3. (4 punten)

Zij a_n het aantal permutaties $\sigma \in S_n$ zodat σ in de cykelnotatie alleen maar cycli van lengte 1 en 2 heeft. Bijvoorbeeld $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$ (namelijk alle elementen van S_3 behalve de twee driecycli). Per definitie $a_0 = 1$.

- a. Laat zien dat a_n voor $n \geq 2$ voldoet aan de recursierelatie

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}.$$

- b. Zij $n \geq 2$. Bewijs met inductie dat $a_n > \sqrt{n!}$.

Opgave 4. (8 punten)

- a. De dihedrale groep D_5 is de symmetriegroep van een vijfhoek. Bepaal het cykel index polynoom voor de werking van D_5 op de zijden van een vijfhoek.
- b. We willen deze zijden kleuren met rood, groen, blauw en paars. Bepaal op hoeveel manieren dit kan, modulo de symmetrie die komt van D_5 .
- c. Hoeveel dergelijke kleuringen zijn er (op symmetrie na), waarbij rood minstens twee keer gebruikt wordt?

Opgave 5. (4 punten)

In deze opgave willen we een versie van het lemma van Burnside met gewichten bewijzen. Zij X een eindige verzameling met een gewichtsfunctie $w : X \rightarrow \mathbb{R}$. Zij G een eindige groep die werkt op X , zodat $w(gx) = w(x)$ voor alle $g \in G, x \in X$. Voor een G -baan B in X is het gewicht $w(B)$ gedefinieerd als $w(x)$, voor een willekeurige $x \in B$.

a. Laat zien dat

$$w(B) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in B} |G_x| w(x),$$

waarbij G_x de stabilisator van x is.

b. Bewijs dat

$$\sum_{G\text{-banen } B} w(B) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in X^g} w(x),$$

waarbij X^g de verzameling van vaste punten van g is.

Opgave 6. (8 punten)

a. Leid de recursierelatie voor de Bell getallen B_n af.

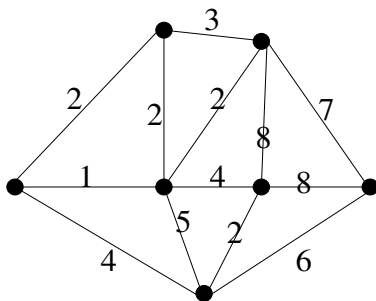
b. Zij $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n / n!$ de exponentiële voortbrengende functie van de Bell getallen. Laat zien dat

$$\frac{dF(x)}{dx} = e^x F(x).$$

c. Gebruik deze gelijkheid om een gesloten formule voor $F(x)$ te vinden.

Opgave 7. (9 punten)

a. Bepaal, met het algoritme van Kruskal, een minimale opspannende boom in de gewogen graaf



b. Zij $G = (V, E, w)$ een gewogen simpele graaf en T een minimale opspannende boom in G . Bewijs dat het algoritme van Kruskal zo uitgevoerd kan worden, dat het de boom T oplevert.

Tentamen Discrete Wiskunde 1
10 april 2012, 14:00–17:00 uur
Antwoorden

NB. De hieronder gegeven antwoorden zijn vaak niet de enige goede manier om tot de oplossing te komen. Zeker voor de bewijsopgaven bestaan er ook andere correcte redeneringen.

Opgave 1. (3 punten)

Gegeven zijn dertig ballen en vier dozen. De ballen zijn niet te onderscheiden maar de dozen wel, die noemen we A, B, C en D . We willen de ballen over de dozen verdelen, zodat

- in doos A zitten minstens 10 ballen;
- in dozen B en C samen zitten hoogstens 17 ballen.

Op hoeveel manieren kan dit?

Antwoord.

We moeten 20 ballen verdelen over 4 dozen. Zonder verdere condities zou dat op $\binom{23}{3}$ manieren kunnen. Als we $B + C$ fixeren op k , dan zijn er precies $k + 1$ manieren om die ballen over B en C te verdelen. Tegelijkertijd zijn er $20 - k + 1$ manieren om de rest over A en D te verdelen. Het aantal mogelijkheden is dus

$$\sum_{k=0}^{17} (k+1)(21-k) = \binom{23}{3} - \sum_{k=18}^{20} (k+1)(21-k) = 1771 - 57 - 40 - 21 = 1653.$$

Opgave 2. (4 punten)

Zij G een simpele graaf. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn.

- (1) G is een boom.
- (2) G heeft geen gesloten paden, maar als je een nieuwe kant toevoegt tussen twee al aanwezige knopen, dan ontstaat er een gesloten pad.

Antwoord.

(1) \Rightarrow (2) Per definitie heeft een boom geen gesloten paden. Voeg een nieuwe kant $e = \{x, y\}$ toe aan G . Omdat een boom samenhangend is, bestaat er een pad van x naar y in G . Dit pad vormt samen met e een gesloten pad.

(2) \Rightarrow (1) We moeten alleen nog laten zien dat G samenhangend is. Kies knopen x, y in G die nog niet direct verbonden zijn, en voeg de kant $e = \{x, y\}$ toe. Per aanname ontstaat een gesloten pad P , dat de kant e zeker gebruikt. Alle knopen in dit gesloten pad zijn dus ook al verbonden door een deel van het pad $P \setminus \{e\}$. In het bijzonder zijn x en y verbonden in G .

Opgave 3. (4 punten)

Zij a_n het aantal permutaties $\sigma \in S_n$ zodat σ in de cykelnotatie alleen maar cycli van lengte 1 en 2 heeft. Bijvoorbeeld $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$ (namelijk alle elementen van S_3 behalve de twee driecykels). Per definitie $a_0 = 1$.

a. Laat zien dat a_n voor $n \geq 2$ voldoet aan de recursierelatie

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}.$$

b. Zij $n \geq 2$. Bewijs met inductie dat $a_n > \sqrt{n!}$.

Antwoord.

a. Laat $\sigma \in S_n$ van dit type zijn. Als $\sigma(n) = n$, dan is $\tau = \sigma|_{\{1, \dots, n-1\}}$ ook van deze soort, dus voor τ zijn a_{n-1} mogelijkheden. Als $\sigma(n) = k \neq n$, dan zijn er $n-1$ keuzes voor k . Voor elk van die keuzes voldoet $\rho = \sigma|_{\{1, \dots, n\} \setminus \{k, n\}}$ aan de cykelconditie voor een permutatie van $n-2$ elementen. Dat levert dus $(n-1)a_{n-2}$ mogelijkheden.

b. Merk op dat de uitspraak geldt voor $n=2$ en voor $n=3$. Neem aan dat het klopt voor alle $k < n$, dan

$$\begin{aligned} a_n^2 &= (a_{n-1} + (n-1)a_{n-2})^2 \\ &= a_{n-1}^2 + (n-1)^2 a_{n-2}^2 + 2(n-1)a_{n-1}a_{n-2} \\ &> (n-1)! + (n-1)^2(n-2)! + 2(n-1)\sqrt{(n-1)!(n-2)!} \\ &> (n-1)! + (n-1)(n-1)! = n! \end{aligned}$$

Opgave 4. (8 punten)

- a. De dihedrale groep D_5 is de symmetriegroep van een vijfhoek. Bepaal het cykel index polynoom voor de werking van D_5 op de zijden van een vijfhoek.
- b. We willen deze zijden kleuren met rood, groen, blauw en paars. Bepaal op hoeveel manieren dit kan, modulo de symmetrie die komt van D_5 .
- c. Hoeveel dergelijke kleuringen zijn er (op symmetrie na), waarbij rood minstens twee keer gebruikt wordt?

Antwoord.

	elementen	cykeltype
a. De elementen van D_5 en hun cykeltypes zijn	identiteit	1^5
	4 rotaties	5
	5 spiegelingen	$1, 2^2$

Het cykel index polynoom is $Z(D_5; t_1, \dots, t_5) = \frac{1}{10}(t_1^5 + 4t_5 + 5t_1 t_2^2)$.

b. Hiervoor moeten we het cykel index polynoom evalueren in $t_i = 4$.

$$Z(D_5; 4, 4, 4, 4, 4) = \frac{1}{10}(4^5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4^3) = 136.$$

c. We nemen de gewichten $w(R) = 1, w(B) = w(P) = w(G) = 0$. Er geldt $w(t^n) = 3 + t^n$. Volgens de stelling van Polya komt het gevraagde aantal uit

$$\begin{aligned} Z(D_5; w(t), w(t^2), w(t^3), w(t^4), w(t^5)) &= \frac{1}{10}((3+t)^5 + 4(3+t^5) + 5(3+t)(3+t^2)^2) \\ &= 39 + 45t + 36t^2 + 12t^3 + 3t^4 + t^5. \end{aligned}$$

De graad correspondeert met het aantal keren rood, dus we moeten alleen de termen met graad ≥ 2 bekijken. Dat zijn er $36 + 12 + 3 + 1 = 52$.

Opgave 5. (4 punten)

In deze opgave willen we een versie van het lemma van Burnside met gewichten bewijzen. Zij X een eindige verzameling met een gewichtsfunctie $w : X \rightarrow \mathbb{R}$. Zij G een eindige groep die werkt op X , zodat $w(gx) = w(x)$ voor alle $g \in G, x \in X$. Voor een G -baan B in X is het gewicht $w(B)$ gedefinieerd als $w(x)$, voor een willekeurige $x \in B$.

a. Laat zien dat

$$w(B) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in B} |G_x| w(x),$$

waarbij G_x de stabilisator van x is.

b. Bewijs dat

$$\sum_{G\text{-banen } B} w(B) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in X^g} w(x),$$

waarbij X^g de verzameling van vaste punten van g is.

Antwoord.

a. De banenformule zegt dat $|B| = |Gx| = |G|/|G_x|$. Daarom

$$\sum_{x \in B} \frac{|G_x|}{|G|} w(x) = \sum_{x \in B} \frac{1}{|B|} w(x) = \frac{|B|}{|B|} w(x) = w(x) = w(B).$$

b. We gaan $Y = \{(g, x) : g \in G, x \in X^g\}$ dubbel tellen:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in X^g} w(x) = \frac{1}{|G|} \sum_Y w(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} \sum_{g \in G_x} w(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x| w(x).$$

Omdat elke $x \in X$ in precies één baan B ligt, is de rechterkant volgens deel a. gelijk aan

$$\frac{1}{|G|} \sum_{G\text{-banen } B} \sum_{x \in B} |G_x| w(x) = \sum_{G\text{-banen } B} w(B).$$

Opgave 6. (8 punten)

a. Leid de recursierelatie voor de Bell getallen B_n af.

b. Zij $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n / n!$ de exponentiële voortbrengende functie van de Bell getallen. Laat zien dat

$$\frac{dF(x)}{dx} = e^x F(x).$$

c. Gebruik deze gelijkheid om een gesloten formule voor $F(x)$ te vinden.

Antwoord.

a. Het is iets handiger om naar B_{n+1} te kijken, dit telt het aantal manieren om $\{1, \dots, n, n+1\}$ te verdelen in niet-lege disjuncte deelverzamelingen. Zij $Y_1 \cup \dots \cup Y_d$ zo'n partitie. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $n+1 \in Y_d$ en dat $|Y_d| = n+1-k$ met $0 \leq k \leq n$. Het aantal mogelijkheden om de k elementen

van $\{1, \dots, n+1\} \setminus Y_d$ te kiezen is $\binom{n}{k}$. De overige verzamelingen Y_1, \dots, Y_{d-1} vormen een partitie van die k elementen, wat op B_k manieren kan. Hieruit volgt de recursierelatie $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.

(Hetzelfde bewijs met een andere boekhouding levert de relatie uit het hoorcollege:

$$B_n = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} B_{n-i}.)$$

b. Uit de definities volgt direct dat

$$\frac{dF(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1} x^n}{n!}.$$

Aan de andere kant

$$e^x F(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{B_m x^n}{m!(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\binom{n}{m} B_m x^n}{n!}.$$

Volgens deel a zijn deze twee uitdrukkingen gelijk.

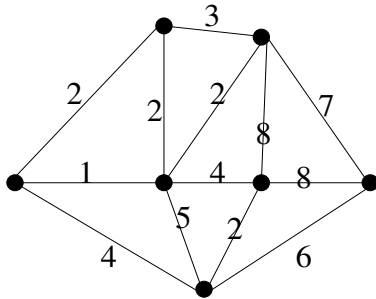
c. We kunnen de differentiaalvergelijking omvormen tot

$$d \log F(x) = \frac{dF(x)}{F(x)} = e^x dx = d(e^x).$$

Dit primitiveren levert $\log F(x) = e^x + c$ met $c \in \mathbb{R}$, ofwel $F(x) = \exp(e^x + c)$. Omdat $F(0) = 1$ geldt $c = -1$ en $F(x) = \exp(e^x - 1)$.

Opgave 7. (9 punten)

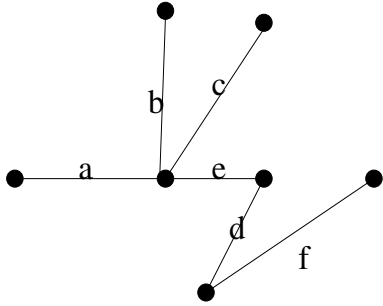
a. Bepaal, met het algoritme van Kruskal, een minimale opspannende boom in de gewogen graaf



b. Zij $G = (V, E, w)$ een gewogen simpele graaf en T een minimale opspannende boom in G . Bewijs dat het algoritme van Kruskal zo uitgevoerd kan worden, dat het de boom T oplevert.

Antwoord.

a. Hieronder een mogelijkheid, waarbij de kanten in alfabetische volgorde gekozen worden.



Een variant op het algoritme van Kruskal eist dat in elke tussenstap de graaf bestaat uit een grote samenhangscomponent en aantal geïsoleerde punten. Volgens die versie moet de volgorde van de kanten d en e omgekeerd worden.

b. Dit is wat moeilijker als je de alternatieve versie van het algoritme van Kruskal neemt. Het volgende bewijs werkt voor beide versies van het algoritme.

Pas het algoritme toe op T . Dit levert een opspannende boom van T , die uiteraard T zelf is. Het geeft ons ook een ordening van de kanten van T , zeg e_1, e_2, \dots, e_{n-1} als er n knopen zijn.

Claim: Op deze manier kunnen de kanten van G gekozen worden volgens het algoritme van Kruskal.

Stel niet. Dan is er een minimale i zodat na $i - 1$ stappen niet e_i gekozen mag worden. Zij $f = \{x, y\}$ een kant die dan wel gekozen mag worden. Omdat e_i geen cykel creëert in $T_{i-1} \subset T$, moet wel $w(f) < w(e_i)$. Aangezien T een opspannende boom van G is, bestaat er een pad P in T tussen x en y . De kanten van P liggen niet allemaal in $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$, want dan zou f niet gekozen mogen worden. Dus er is een $e_k \in P$ met $k \geq i$. Merk op dat de eindpunten van e_k verbonden worden door het pad $P \setminus \{e_k\}$. Bekijk nu

$$T' := (V, \{f, e_1, \dots, e_{n-1}\} \setminus \{e_k\}).$$

De eindpunten van e_k zijn verbonden in T' en de rest was al verbonden omdat T samen hing, dus T' is samenhangend. Verder heeft T' precies $n - 1$ kanten, dus volgens een stelling uit het hoorcollege is T' een boom. Tenslotte geldt

$$w(T') = w(T) + w(f) - w(e_k) < w(T).$$

Dit is in tegenspraak met de minimaliteit van T , wat de claim bewijst.

Met het algoritme van Kruskal is het dus mogelijk om alleen maar kanten van T te kiezen. Het resultaat is dan een opspannende boom die bevat is in T , wat alleen maar kan als het T zelf is.