Antwoorden van het Hertentamen Discrete Wiskunde 2
14 augustus 2012, 14:00–17:00 uur

Maarten Solleveld

Opgave 1. (3 punten)
Laat zien dat voor elk $3-(v,6,1)$-design geldt dat $v \equiv 2$ of $v \equiv 6$ modulo 20.

Oplossing
Het aantal blokken b, het replicatiegetal r en het aantal blokken λ_2 dat een vast paar $\{x,y\} \subset X$ bevat zijn:

$$b = \frac{\binom{v}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{v(v-1)(v-2)}{6 \cdot 5 \cdot 4},$$
$$r = \frac{\binom{v-1}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{(v-1)(v-2)}{5 \cdot 4},$$
$$\lambda_2 = \frac{\binom{v-2}{1}}{\binom{4}{1}} = \frac{v-2}{4}.$$

Dit moeten allemaal natuurlijke getallen zijn. Voor λ_2 zien we dat $v \equiv 2$ modulo 4, ofwel $v = 4n+2$ voor een zekere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dit vullen we in bij r:

$$r = \frac{(4n+1)4n}{5 \cdot 4} = \frac{n(4n+1)}{5} \in \mathbb{N}.$$

Hieruit volgt dat n of $4n+1$ deelbaar is door 5. Dus $n = 5m$ of $n = 5m+1$, voor een $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. In het eerste geval $v = 20m+2$ en in het tweede geval $v = 20m+6$.

Opgave 2. (4 punten)
Deze opgave gaat over een schoolklas die bestaat uit 25 meisjes. Voor het gemak benoemen we de meisjes met de elementen van $\mathbb{F}_5^2$.

a. Laat zien dat de verzameling van affiene lijnen in $\mathbb{F}_5^2$ een $(2,5,25)$-Steiner systeem vormt.

b. De schoolmeisjes wandelen graag in vijf groepjes van vijf. Elke dag worden nieuwe groepjes gevormd, en ze willen dat zo doen, dat na zes dagen iedereen een keer met elk ander meisje heeft gewandeld. Geef een oplossing voor dit probleem.

Oplossing
2.a. (2 punten)
Het is duidelijk dat $v = |\mathbb{F}_5^2| = 25$. Elk blok is een affiene lijn en heeft dus evenveel elementen als een 1-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{F}_5^2$, ofwel $k = 5$. Verder is het een eigenschap van affiene vlakken dat elk paar punten op een unieke affiene lijn ligt. Dit betekent dat we een 2-design met $\lambda = 1$ hebben, en dat is per definitie hetzelfde als een $(2,5,25)$-Steiner systeem.
2.b. (2 punten)

Er zijn 30 affiene lijnen, die verdeeld zijn over zes equivalentieklassen van parallelle lijnen. Voor $i \in \mathbb{F}_5$ zijn de lijnen

$$L_{i,c} := \{(x, ix + c) \mid x \in \mathbb{F}_5\} \qquad c \in \mathbb{F}_5$$

parallel en de lijnen

$$L_{\infty,c} := \{(c, y) \mid y \in \mathbb{F}_5\} \qquad c \in \mathbb{F}_5$$

vormen de zesde equivalentieklasse. Nu vormen we de groepjes zo, dat op elke dag slechts lijnen uit één equivalentieklasse gebruikt worden. Dit kan omdat verschillende parallelle lijnen disjunct zijn.

Na zes dagen zijn dan alle affiene lijnen precies één keer voorgekomen. Omdat elke twee punten van $\mathbb{F}_5^2$ in een unieke affiene lijn zitten, heeft elk meisjes dan precies één keer met ieder ander meisjes gewandeld.

Opgave 3. (6 punten)
Zij $(X, \mathcal{B})$ een $t-(v, k, \lambda)$-design en zij $Y \subset X$ een deelverzameling met $|Y| = s \leq t$.

a. Laat zien dat $|\{B \in \mathcal{B} : B \cap Y = \emptyset\}|$ alleen van s en niet van de elementen van Y afhangt.

b. Stel dat $|Y| = v - k \leq t$. Laat zien dat Y niet alle blokken van $\mathcal{B}$ snijdt.

c. Neem aan dat $k+t \geq v$. Bewijs dat $\mathcal{B}$ uit alle k-deelverzamelingen van X bestaat.

Oplossing

3.a. (2 punten)

We weten dat elke deelverzameling $S \subset X$ met $n \leq t$ elementen bevat is in precies

$$\lambda_n = \lambda \frac{\binom{v-n}{t-n}}{\binom{k-n}{t-n}}$$

blokken. We kunnen

$$\{B \in \mathcal{B} \mid B \cap Y = \emptyset\} = \bigcap_{y \in Y} \{B \in \mathcal{B} \mid y \notin B\}$$

tellen met behulp van inclusie–exclusie:

$$\begin{aligned}
&\Big|\bigcap_{y \in Y} \{B \in \mathcal{B} \mid y \notin B\}\Big| = \\
&|\mathcal{B}| - \sum_{y \in Y} |\{B \in \mathcal{B} \mid y \in B\}| + \sum_{\{y, y'\} \subset Y} |\{B \in \mathcal{B} \mid \{y, y'\} \subset B\}| - \cdots = \\
&\sum_{S \subset Y} (-1)^{|S|} |\{B \in \mathcal{B} \mid S \subset B\}| = \\
&\sum_{S \subset Y} (-1)^{|S|} \lambda_{|S|} = \\
&\sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} (-1)^n \lambda_n.
\end{aligned}$$

De laatste uitdrukking hangt niet meer af van de elementen van Y.
3.b. (2 punten)
Zij $B_0 \in \mathcal{B}$ en $Y_0 := X \setminus B_0$. Dan $|Y_0| = v - k$ en $Y_0 \cap B_0 = \emptyset$. Dus $|\{B \in \mathcal{B} : B \cap Y_0 = \emptyset\}| \geq 1$. Maar volgens deel a geldt dan ook $|\{B \in \mathcal{B} : B \cap Y = \emptyset\}| \geq 1$.
3.c. (2 punten)
Stel dat $C \subset X$ met $|C| = k$ en $C \notin \mathcal{B}$. Dan snijdt $Y := X \setminus C$ alle k-deelverzamelingen van X behalve C, dus Y snijdt alle blokken van $(X, \mathcal{B})$. Omdat $|Y| = v - k$ is dit in tegenspraak met onderdeel b.

Opgave 4. (9 punten)
Zij $(X, \mathcal{B})$ een $t - (v, k, \lambda)$-design met $b = v$ blokken en replicatiegetal $r = k$. We schrijven $X = \{1, 2, \ldots, v\}$ en $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_v\}$.

a. Zij $I \subset \{1, 2, \ldots, v\}$. Toon aan dat

$$\Big|\bigcup_{i \in I} B_i\Big|\, r \geq |I|\, k$$

en dat $\mathcal{B}$ een volledige matching heeft.

b. Zij $(x_1, x_2, \ldots, x_v)$ een volledige matching voor $\mathcal{B}$ en zij $B'_i = B_i \setminus \{x_i\}$, $\mathcal{B}' = \{B'_i \mid 1 \leq i \leq v\}$. Laat zien dat $(X, \mathcal{B}')$ een 1-design is, en dat zijn blokgrootte gelijk is aan zijn replicatiegetal.

c. Bewijs dat er een Latijns vierkant L van grootte v bestaat, zodat de verzameling getallen in de eerste k rijen van de i-de kolom precies B_i is.

d. Construeer de eerste drie rijen van een vierkant als in c, in het geval dat $(X, \mathcal{B})$ het projectieve vlak over $\mathbb{F}_2$ is.

Oplossing
4.a. (2 punten)
We gaan paren (B_i, x) met $i \in I$ en $x \in B_i$ dubbel tellen. Omdat $|B_i| = k$ voor alle i, zijn het er $|I|k$. De x'en die voorkomen zitten allemaal in $\cup_{i \in I} B_i$. Elke x ligt in precies r blokken, maar die blokken hoeven niet allemaal een index $i \in I$ te hebben. Dus het aantal paren is ten hoogste $\big|\cup_{i \in I} B_i\big|\, r$.

Omdat $k = r$ geldt ook $|I| \leq \big|\cup_{i \in I} B_i\big|$. Volgens de huwelijksstelling van Hall heeft $\mathcal{B}$ dan een volledige matching.
4.b. (2 punten)
Het is duidelijk dat elk blok van $\mathcal{B}'$ $k' := k - 1$ elementen heeft. Elke $x \in X$ ligt in r blokken B_i. Maar $x = x_j$ voor een unieke j, dus x is uit precies één blok weggehaald door $B_i \mapsto B'_i$. Ofwel

$$r'_x = r_x - 1 = r - 1 = k - 1 = k'.$$

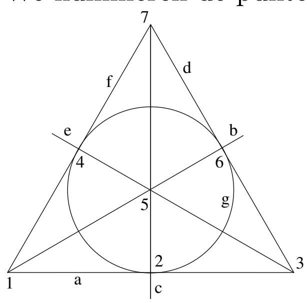
Omdat r'_x voor alle $x \in X$ hetzelfde is, is $(X, \mathcal{B})$ een 1-design is met $r' = k'$.
4.c. (3 punten)
Voor de eerste rij van het Latijnse vierkant kiezen we een volledige matching voor $\mathcal{B}$, wat kan volgens deel a. Volgens deel b is $(X, \mathcal{B}')$ een 1-design met $k' = r'$. Bovendien

geldt nog steeds $b' = b = v = v'$, dus ook $(X, \mathcal{B}')$ voldoet aan de voorwaarden van de opgave (met $t = 1$). Een volledige matching voor $(X, \mathcal{B}')$ geeft dan de tweede rij van het vierkant. Op deze manier kunnen we k rijen van het vierkant vullen. Per constructie zijn de eerste k elementen van de i-de kolom verschillend en liggen in B_i, dus samen vormen ze precies B_i.

We hebben nu een Latijnse rechthoek van grootte $k \times r$. In het college is bewezen dat die altijd uit te breiden is tot een Latijns vierkant van grootte r.

4.d. (2 punten)

We nummeren de punten met cijfers en de blokken met letters, bijvoorbeeld



We kunnen de gevraagde Latijnse rechthoek vinden door de constructie in deel c echt uit te voeren. Een mogelijk antwoord is

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 5. (8 punten)

Beschouw de n-dimensionale vectorruimte $\mathbb{F}_q^n$ over een eindig lichaam $\mathbb{F}_q$. Zij $d < n$ en zij X de verzameling van d-dimensionale lineaire deelruimten van $\mathbb{F}_q^n$. Voor elke $d+1$-dimensionale lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{F}_q^n$ definiëren we een blok

$$B_V := \{W \in X \mid W \subset V\}.$$

Zij $\mathcal{B}$ de verzameling van zulke blokken.

a. Ga na dat $(X, \mathcal{B})$ een 1-design is, en bepaal de parameters.

b. Voor welke n, d, q is $(X, \mathcal{B})$ een 2-design? Vind alle mogelijkheden.
Hint: bekijk $\dim(W + W')$ voor $W, W' \in X$.

c. Bepaal alle n, d, q waarvoor $(X, \mathcal{B})$ een vierkant 2-design is.

Oplossing

5.a. (2 punten)

Er geldt $v = \begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q$. De blokgrootte is het aantal d-dimensionale lineaire deelruimten van een $d+1$-dimensionale vectorruimte over $\mathbb{F}_q$, dus

$$k = \begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix}_q = \frac{q^{q+1} - 1}{q - 1}.$$

Bekijk een willekeurige $W \in X$. De blokken die W bevatten zijn in bijectie met de lijnen in de vectorruimte $\mathbb{F}_q^n/W$, en daarvan zijn er

$$\begin{bmatrix} n-d \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^{n-d}-1}{q-1}.$$

Dus $(X, \mathcal{B})$ is een 1-design met $\lambda = (q^{n-d}-1)/(q-1)$.

5.b. (4 punten)

Neem aan dat $(X, \mathcal{B})$ een 2-design is en dat $W \neq W' \in X$. Dan $\dim(W + W') > d$. De blokken die $\{W, W'\}$ bevatten zijn de B_V waarvoor $W + W' \subset V$. Er bestaat precies één dergelijk blok als $\dim(W + W') = d + 1$ (namelijk $B_{W+W'}$), en geen als $\dim(W + W') > d + 1$.

Het aantal van zulke blokken hangt per aanname niet af van W, W'. Omdat er altijd W, W' bestaan zodat $\dim(W + W') = d + 1$, mag het niet voorkomen dat $\dim(W + W') > d + 1$. Dit sluit uit dat $2 \leq d \leq n - 2$. Het geval $d = 0$ is flauw, dus dat laten we buiten beschouwing.

De enige mogelijkheden voor d zijn dus $d = 1$ en $d = n - 1$. In beide gevallen geldt, onafhankelijk van n en q, dat elk paar W, W' in een uniek blok ligt, dus dat we 2-design met $\lambda = 1$ hebben.

5.c. (2 punten)

We moeten nagaan in welke gevallen van deel b geldt dat $b = v$. Als $d = n - 1$ dan is er slechts één blok en er zijn meerdere punten (tenzij $d = 0$, maar dat is flauw). Dus moet wel $d = 1$. Het aantal punten en het aantal blokken zijn dan

$$v = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

$$b = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)}{(q^2 - 1)(q - 1)}.$$

We zien dat $b = v$ dan en slechts dan als $\frac{q^{n-1}-1}{q^2-1} = 1$, ofwel als $n = 3$. Dus voor $d = 1, n = 3$ en q willekeurig krijgen we een vierkant 2-design. Dit is natuurlijk het projectieve vlak over $\mathbb{F}_q$.