Tentamen Dynamische Systemen

26 augustus 2009, 14.00u - 17.00u, HG 00.071

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Je mag gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1

We bekijken de serie van functies geparametriseerd door $c \in \mathbb{R}$ gedefineerd door:

$$A_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x - c}.$$

Zij $\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{3}$.

1. Laat zien dat er bij $c = \alpha$ een bifurcatie optreedt te $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en benoem het type bifurcatie.
2. Laat zien dat er bij $c = -\alpha$ een bifurcatie optreedt. Benoem het type bifurcatie.
3. Zij $-\alpha < c_0 < \alpha$ en $\alpha < c_1$. Bewijs dat A_{c_0} en A_{c_1} niet topologisch geconjugeerd zijn.
4. Bewijs dat voor alle $c \in \mathbb{R}$, A_c topologisch geconjugeerd is met A_{-c}.

Opgave 2

Beschouw de stuksgewijs lineaire functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefineerd door:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{als } x \in (-\infty, \frac{1}{3}] \\ 3 - 3x & \text{als } x \in (\frac{1}{3}, \infty). \end{cases}$$

Zie ook de volgende figuur.

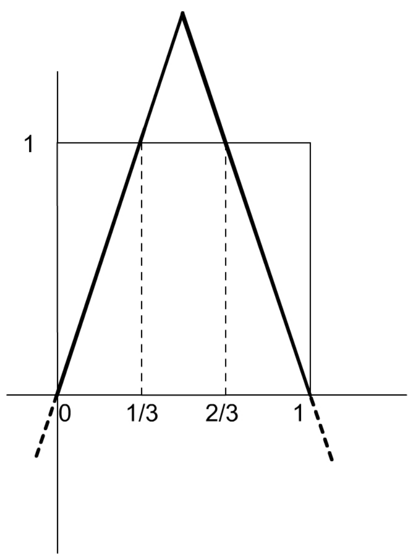

Figure 1: Grafiek van $f(x)$ behordende bij opgave 2.

We defineren:

$$\Lambda := \{x \in [0, 1] \mid \forall n \in \mathbb{N} \;\; f^n(x)\} .$$

1. Laat zien dat Λ gesloten is. Bijvoorbeeld door het volgende te bewijzen. Als een rij $x_n \in \Lambda$ naar $x \in [0, 1]$ convergeert, dan $x \in \Lambda$.

Net als in het boek, zij Σ_2 de verzameling van oneindige rijtjes van nullen en enen:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid s_i \in \{0, 1\}\} ,$$

en zij $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2 : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (s_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ de shift afbeelding.

Voor $n \in \mathbb{N}^*$ defineren de functie $a_n : \Sigma_2 \to \{0, 1\}$ die aangeeft of er een even of oneven aantal enen vóór de n-de plek in een rijtje $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ staan. Formeel:

$$a_n : \Sigma_2 \to \{0, 1\} : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } \sum_{k=0}^{n-1} s_k \text{ is even.} \\ 1 & \text{als } \sum_{k=0}^{n-1} s_k \text{ is oneven.} \end{cases}$$

Verder spreken we af $a_0((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) = 0$.

Zij nu:

$$T : \Sigma_2 \to \mathbb{R} : (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - a_n((s_i)_{i\in\mathbb{N}})|}{3^n}.$$

2. Laat zien dat het beeld van T bevat is in het interval $[0, 1]$.
3. Laat zien dat onderstaand diagram commuteert. Dat wil zeggen, laat zien dat $f \circ T = T \circ \sigma$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_2 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "T"] & \Sigma_2 \arrow[d, "T"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

4. Concludeer dat T waarden in Λ aanneemt.

We leggen een metriek op Σ_2 door:

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n}.$$

Het boek geeft een bewijs van het volgende. Zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_2$ en stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \le i \le N$. Dan $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \le \frac{1}{2^N}$.

5. Geef een bewijs van het feit dat σ een dichte baan heeft.

Men kan bewijzen dat $T : \Sigma_2 \to \Lambda$ continu en surjectief is. Dit mag je gebruiken voor de volgende opgave. Pas wel op! Het is vanaf dit punt niet duidelijk ofdat $T : \Sigma_2 \to \Lambda$ een homeomorfisme is.

6. Laat zien dat $f : \Lambda \to \Lambda$ topologisch transitief is. HINT: het volstaat te laten zien dat $f : \Lambda \to \Lambda$ een dichte baan heeft.

Opgave 3

Beschouw de stuksgewijs lineaire functie $f : [0,3] \to [0,3]$ gedefineerd door:

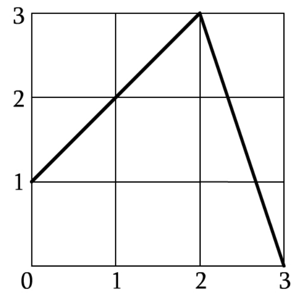

Figure 2: Grafiek van $f(x)$ behordende bij opgave 3.

1. Laat zien dat er een periodiek punt van priemperiode 37 bestaat.

Men kan bewijzen het volgende bewijzen. Als $I \subseteq [0,3]$ een open interval is dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zonanig $f^n(I) = [0,3]$. Dit mag je als aanname voor de volgende opgaven gebruiken.

2. Bewijs dat f topologisch transitief is.
3. Laat zien dat de periodieke punten van f dicht liggen in het interval $[0,3]$.

Tentamen Dynamische Systemen

26 augustus 2009, 14.00u - 17.00u, HG 00.071

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Je mag gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1

We bekijken de serie van functies geparametriseerd door $c \in \mathbb{R}$ gedefineerd door:

$$A_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x - c}.$$

Zij $\alpha = \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

1. Laat zien dat er bij $c = \alpha$ een bifurcatie optreedt te $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en benoem het type bifurcatie. **Antw:** vul de voorwaarden van stelling 12.6 in. Saddle-node bifurcatie.

2. Laat zien dat er bij $c = -\alpha$ een bifurcatie optreedt. Benoem het type bifurcatie. **Antw:** de bifurcatie treedt op bij $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (gebruik opgave 1 en symmetrie). Vul 12.6 in. Saddle-node bifurcatie.

3. Zij $-\alpha < c_0 < \alpha$ en $\alpha < c_1$. Bewijs dat A_{c_0} en A_{c_1} niet topologisch geconjugeerd zijn. **Antw:** A_{c_0} heeft 3 vaste punten, A_{c_1} heeft maar 1 vast punt. Topologische conjugatie behoudt vaste punten, dus A_{c_0} kan niet topologisch geconjugeerd zijn met A_{c_1}.

4. Bewijs dat voor alle $c \in \mathbb{R}$, A_c topologisch geconjugeerd is met A_{-c}. **Antw:** $h(x) = -x$ geeft $A_c \circ h = h \circ A_{-c}$.

Opgave 2

Beschouw de stuksgewijs lineare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefineerd door:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{als } x \in (-\infty, \frac{1}{3}] \\ 3 - 3x & \text{als } x \in (\frac{1}{3}, \infty). \end{cases}$$

Zie ook de volgende figuur.

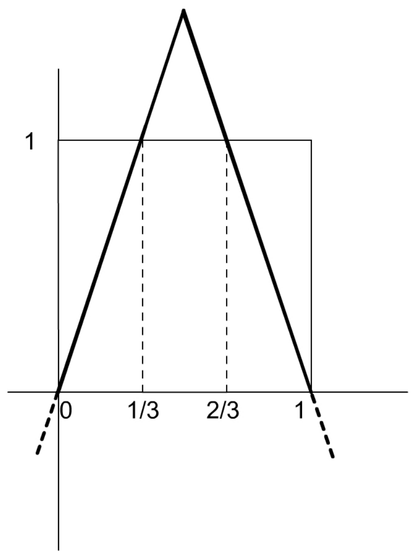

Figure 1: Grafiek van $f(x)$ behordende bij opgave 2.

We defineren:

$$\Lambda := \{x \in [0,1] \mid \forall n \in \mathbb{N} \;\; f^n(x)\}.$$

1. Laat zien dat Λ gesloten is. Bijvoorbeeld door het volgende te bewijzen. Als een rij $x_n \in \Lambda$ naar $x \in [0,1]$ convergeert, dan $x \in \Lambda$. **Antw:** Wegens continuiteit van f en geslotenheid van $[0,1]$ hebben we voor elke $k \in \mathbb{N}$ dat: $f^k(x) = \lim_{n\to\infty} f^k(x_n) \in [0,1]$. Dus per definitie $x \in \Lambda$.

Net als in het boek, zij Σ_2 de verzameling van oneindige rijtjes van nullen en enen:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}\},$$

en zij $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2 : (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (s_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ de shift afbeelding.

Voor $n \in \mathbb{N}^*$ defineren de functie $a_n : \Sigma_2 \to \{0,1\}$ die aangeeft of er een even of oneven aantal enen vóór de n-de plek in een rijtje $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ staan. Formeel:

$$a_n : \Sigma_2 \to \{0,1\} : (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } \sum_{k=0}^{n-1} s_k \text{ is even.} \\ 1 & \text{als } \sum_{k=0}^{n-1} s_k \text{ is oneven.} \end{cases}$$

Verder spreken we af $a_0((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) = 0$.

Zij nu:

$$T : \Sigma_2 \to \mathbb{R} : (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - a_n((s_i)_{i\in\mathbb{N}})|}{3^n}.$$

2. Laat zien dat het beeld van T bevat is in het interval $[0, 1]$. **Antw:** rekenen.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ [0,1] & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{R} \end{array}$$

3. Concludeer dat T waarden in Λ aanneemt. **Antw:** Met de vorige opgave: $f^k \circ T(x) = T \circ \sigma^k(x) \in [0, 1]$. Dus $T(x) \in \Lambda$ voor alle $x \in \Sigma_2$.

We leggen een metriek op Σ_2 door:

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n}.$$

Het boek geeft een bewijs van het volgende. Zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_2$ en stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \leq i \leq N$. Dan $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \leq \frac{1}{2^N}$.

5. Geef een bewijs van het feit dat σ een dichte baan heeft. **Antw:** zie boek.

Men kan bewijzen dat $T : \Sigma_2 \to \Lambda$ continu en surjectief is. Dit mag je gebruiken voor de volgende opgave. Pas wel op! Het is vanaf dit punt niet duidelijk ofdat $T : \Sigma_2 \to \Lambda$ een homeomorfisme is.

6. Laat zien dat $f : \Lambda \to \Lambda$ topologisch transitief is. Hint: het volstaat te laten zien dat $f : \Lambda \to \Lambda$ een dichte baan heeft. **Antw:** Zij $y \in \Sigma_2$ zodanig dat deze een dichte baan in Σ_2 heeft. We laten zien dat de baan van $T(y) \in \Lambda$ dicht ligt in Λ. Merk op dat $T(O^+(y)) = O^+(T(y))$. Zij nu $x \in \Lambda$. Neem $z \in T^{-1}(x)$ (T is surjectief). Kies een rij $y_n \in O^+(y)$ die naar z convergeert (vorige opgave). Dan convergeert $T(y_n)$ naar $T(z) = x$ (T is continu).

Opgave 3

Beschouw de stuksgewijs lineaire functie $f : [0,3] \to [0,3]$ gedefineerd door:

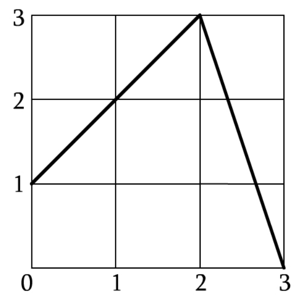

Figure 2: Grafiek van $f(x)$ behordende bij opgave 3.

1. Laat zien dat er een periodiek punt van priemperiode 37 bestaat. **Antw:** $[2,3] \subseteq f([1,2]), [0,1] \subseteq f([2,3]), [1,2] \subseteq f([0,1])$. Dus er ligt een vast punt t.o.v. f^3 in $[1,2]$ (zie H10). Dit is geen vast punt t.o.v. f (zie plaatje), dus het punt is van priemperiode 3. Gebruik nu Sarkovskii.

Men kan bewijzen het volgende bewijzen. Als $I \subseteq [0,3]$ een open interval is dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zonanig $f^n(I) = [0,3]$. Dit mag je als aanname voor de volgende opgaven gebruiken.

2. Laat zien dat dat f gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden heeft. **Antw:** kies $\delta = 1$. Zij $x \in [0,3]$ en zij I een open interval rondom x. Kies n zdd $f^n(I) = [0,3]$. Als $f^n(x) < \frac{3}{2}$ dan kies $y \in I$ met $f^n(y) > \frac{5}{2}$. Als $f^n(x) \geq \frac{3}{2}$ dan kies $y \in I$ met $f^n(y) < \frac{1}{2}$.

3. Laat zien dat de periodieke punten van f dicht liggen in het interval $[0,3]$. **Antw:** We laten zien dat er in ieder gesloten deelinterval van [0,3] (ongelijk aan een enkel punt) een periodiek punt ligt. Zij I zo'n interval. Uit het gegeven volgt dat er een n is zdd $f^n(I) = [0,3]$. Dus $I \subseteq f^n(I)$. Hieruit volgt dat er in I een periodiek punt ligt van periode n (zie H10).