Tentamen Dynamische Systemen

1 juli 2009, 14.00 - 17.00 uur

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Je mag gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

We noteren $\mathbb{N}^*$ voor de natuurlijke getallen zonder 0.

Opgave 1

(**Totaal 30 punten**). We bekijken de serie van functies geparametriseerd door $c \in \mathbb{R}$ gedefineerd door:

$$H_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-c)^2$$

1. (10 punten) Laat zien dat voor $c = -\frac{1}{4}$ en $c = \frac{3}{4}$ bifurcaties op treden en benoem het type bifurcatie.

2. (10 punten) Zij $c_0 < -\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} < c_1 < \frac{3}{4}$ en $c_2 > \frac{3}{4}$. Laat zien dat H_{c_i} niet topologisch geconjugeerd is met H_{c_j} als $i \neq j$.

3. (5 punten) Bereken de Schwarz-afgeleide

$$SH_c(x) = \frac{H_c'''(x)}{H_c'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{H_c''(x)}{H_c'(x)}\right)^2,$$

   en laat zien dat H_c (voor willekeurige c) maar eindig veel aantrekkende periodieke banen heeft. Kun je een expliciete bovengrens voor het aantal aantrekkende periodieke banen geven?

4. (5 punten) Laat zien dat H_c topologisch geconjugeerd is met $Q_{-c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - c$.

Opgave 2

(**Totaal 44 punten**). Zij $\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. τ voldoet aan de vergelijking $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. In deze opgave beschouwen we de volgende functie:

$$f : [0, \tau] \to [0, \tau] : x \mapsto \begin{cases} \tau x & 0 \leq x \leq 1 \\ \tau(x-1) & 1 < x \leq \tau. \end{cases}$$

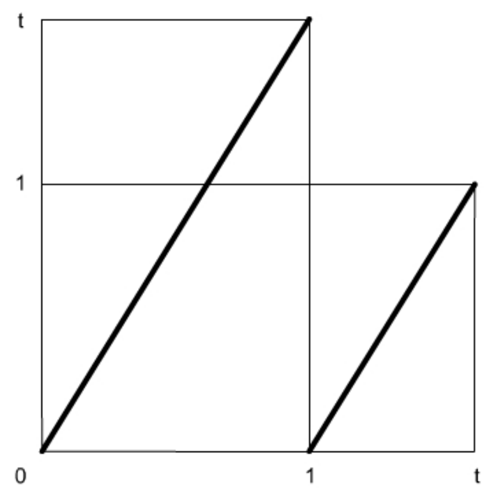

Figure 1: Grafiek van $f(x)$ behordende bij opgave 2. t moet τ zijn.

We defineren de volgende intervallen $I_0 := [0,1]$, $I_1 := (1, \tau]$.

Zij verder Σ_2 als in het boek:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}\}.$$

Zij nu Σ' de deelverzameling van Σ_2 die bestaat uit de rijtjes zonder twee opeenvolgende enen, dus formeel:

$$\Sigma' := \{(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}, \quad s_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = 0\}.$$

We beschouwen we de functie:

$$S : [0, \tau] \to \Sigma_2 : x \mapsto (s_0, s_1, s_2, \ldots),$$

met $s_i = k$ als $f^i(x) \in I_k$.

1. (4 punten) Bewijs dat het beeld van S in feite bevat is in Σ'.

2. (4 punten) Bewijs dat S injectief is, dus als $S(x) = S(y)$ dan $x = y$. HINT: laat zien dat voor z met $x \leq z \leq y$ geldt dat $S(z) = S(x) = S(y)$. Leid hieruit een tegenspraak af als $x \neq y$.

We defineren de functie T door:

$$T : \Sigma' \to [0, \tau] : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{\tau^i}.$$

3. (4 punten) Laat zien dat het het beeld van T inderdaad bevat is in $[0, \tau]$.

4. (4 punten) Laat zien dat T niet injectief is. HINT: bekijk het inverse beeld van 1.

We leggen een metriek d op Σ' door

$$d((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (t_i)_{i \in \mathbb{N}}) = |\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{\tau^i}|,$$

en benadrukken dat de absolute waarde buiten de som staat. A priori is het misschien niet duidelijk dat dit een metriek is, maar dit mag je als aanname voor de opgaven gebruiken. De metriek is zo gekozen dat

$$d((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (t_i)_{i \in \mathbb{N}}) = |T\left((s_i)_{i \in \mathbb{N}}\right) - T\left((t_i)_{i \in \mathbb{N}}\right)|,$$

waaruit volgt dat T continu is. Bovendien geldt dat T surjectief is. Dit mag je voor de volgende opgaven gebruiken.

Zij $\sigma : \Sigma' \to \Sigma' : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (s_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ de shift. We hebben nu de afbeeldingen:

$$\begin{tikzcd} \Sigma' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "T"'] & \Sigma' \arrow[d, "T"'] \\ {[0, \tau]} \arrow[r, "f"] & {[0, \tau].} \end{tikzcd}$$

5. (8 punten) Laat door middel van een directe berekening zien dat $f \circ T((s_i)_{i \in \mathbb{N}}) = T \circ \sigma((s_i)_{i \in \mathbb{N}})$ voor alle $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma' \backslash \{(10000\ldots)\}$. HINT: laat beide afbeeldingen los op een rij $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en beschouw de gevallen $s_0 = 0$ en $s_0 = 1$ apart.

6. (4 punten) Bewijs het volgende: zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma'$ en stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \leq i \leq N$. Dan $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \leq \frac{1}{\tau^{N-1}}$.

7. (8 punten) Laat zien dat de periodieke punten van σ dicht liggen in Σ'.

8. (8 punten) Laat zien dat de periodieke punten van f dicht liggen in $[0, \tau]$.

Opgave 3

(**Totaal 16 punten**). We beschouwen de volgende functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welke buiten het interval $[0, 6]$ gedefineerd is door:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \forall x < 0 \\ 0 & \forall x > 6 \end{cases}$$

en binnen het interval $[0, 6]$ door de stuksgewijs lineaire functie:

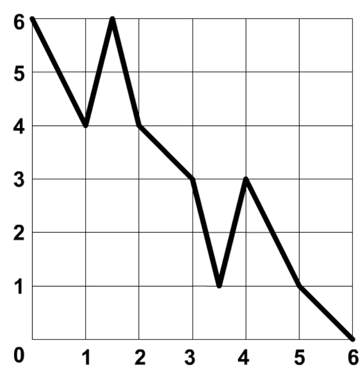

Figure 2: Grafiek van $f(x)$ op $[0, 6]$ behordende bij opgave 3.

1. (5 punten) Laat zien dat de functie precies 1 vast punt heeft en dat alle andere periodieke punten even priemperiode hebben.

2. (11 punten) Laat zien dat er voor iedere even $n \in \mathbb{N}^*$ een punt $x \in \mathbb{R}$ is, zodanig dat x periodiek is van priemperiode n. Hint: gebruik de stelling van Sarkovskii.

Tentamen Dynamische Systemen

1 juli 2009, 14.00 - 17.00 uur

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Je mag gebruik maken van ‘graphical analysis’, ofwel kijken naar het plaatje. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

We noteren $\mathbb{N}^*$ voor de natuurlijke getallen zonder 0.

Opgave 1

(**Totaal 30 punten**). We bekijken de serie van functies geparametriseerd door $c \in \mathbb{R}$ gedefineerd door:

$$H_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x - c)^2$$

1. (10 punten) Laat zien dat voor $c = -\frac{1}{4}$ en $c = \frac{3}{4}$ bifurcaties op treden en benoem het type bifurcatie. **Antw:** Als $c = -\frac{1}{4}$ dan is $x = \frac{1}{4}$ een vast punt. Controleer de voorwaarde van stelling 12.6 om te concluderen dat dit heen saddle-node bifurcation is. Als $c = \frac{3}{4}$ dan is $x = \frac{1}{4}$ een vast punt waarvoor de voorwaarden van stelling 12.7 gelden. Er is dus een period-doubling bifurcation.

2. (10 punten) Zij $c_0 < -\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} < c_1 < \frac{3}{4}$ en $c_2 > \frac{3}{4}$. Laat zien dat H_{c_i} niet topologisch geconjugeerd is met H_{c_j} als $i \neq j$. **Antw:** H_{c_0} heeft geen vaste punten. H_{c_1} heeft 2 vaste punten, waarvan 1 aantrekkend en 1 afstotend (plaatje volstaat). H_{c_2} heeft twee afstotende vaste punten. Omdat topologische conjugatie vaste punten en stabiele verzamelingen bewaart kunnen de verschillende functies niet topologisch geconjugeerd zijn.

3. (5 punten) Bereken de Schwarz-afgeleide

$$SH_c(x) = \frac{H_c'''(x)}{H_c'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{H_c''(x)}{H_c'(x)}\right)^2,$$

en laat zien dat H_c (voor willekeurige c) maar eindig veel aantrekkende periodieke banen heeft. Kun je een expliciete bovengrens voor het aantal aantrekkende periodieke banen geven? **Antw:** Rekeken + stelling in hoofdstuk 11 geeft dat 3 een expliciete bovengrens is. Zelfs 1 is een bovengrens (lees hoofdstuk 11).

4. (5 punten) Laat zien dat H_c topologisch geconjugeerd is met $Q_{-c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - c$. **Antw:** h(x) = x + c. Dan $h \circ Q_{-c} = H_c \circ h$.

Opgave 2

(**Totaal 44 punten**). Zij $\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. τ voldoet aan de vergelijking $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. In deze opgave beschouwen we de volgende functie:

$$f : [0,\tau] \to [0,\tau] : x \mapsto \begin{cases} \tau x & 0 \le x \le 1 \\ \tau(x-1) & 1 < x \le \tau. \end{cases}$$

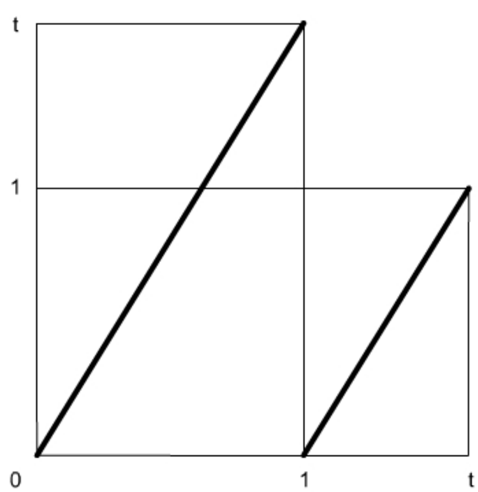

Figure 1: Grafiek van $f(x)$ behordende bij opgave 2. t moet τ zijn.

We defineren de volgende intervallen $I_0 := [0,1]$, $I_1 := (1,\tau]$.

Zij verder Σ_2 als in het boek:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}\}\,.$$

Zij nu Σ' de deelverzameling van Σ_2 die bestaat uit de rijtjes zonder twee opeenvolgende enen, dus formeel:

$$\Sigma' := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}, \quad s_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = 0\}\,.$$

We beschouwen we de functie:

$$S : [0,\tau] \to \Sigma_2 : x \mapsto (s_0, s_1, s_2, \ldots),$$

met $s_i = k$ als $f^i(x) \in I_k$.

1. (4 punten) Bewijs dat het beeld van S in feite bevat is in Σ'. **Antw:** Stel $S(x) = (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $s_n = 1$. Dan $f^n(x) \in I_1$. Dan $f^{n+1}(x) \in I_0$ (want $f(I_1) \subseteq I_0$). Dan $s_{n+1} = 0$.

2. (4 punten) Bewijs dat S injectief is, dus als $S(x) = S(y)$ dan $x = y$. HINT: laat zien dat voor z met $x \leq z \leq y$ geldt dat $S(z) = S(x) = S(y)$. Leid hieruit een tegenspraak af als $x \neq y$. **Antw:** Uit $I_n \ni x \leq z \leq y \in I_n$ voor zeker n, volgt $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$, omdat f strikt stijgend is op I_n. Uit $S(x) = S(y)$ volgt zo dat $f^n(z) \in I_{S(x)_n}$. Dus $S(x) = S(y) = S(z)$. (Zie tot hier stelling 7.2, eerste alinea!). Als $x \neq y$ dan is er een interval dat onder toepassen f^n geheel in één der intervallen I_0 of I_1 ligt. Dit kan niet, want f^n maakt zo'n interval τ^n keer zo groot.

We defineren de functie T door:

$$T : \Sigma' \to [0,\tau] : (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{\tau^i}.$$

3. (4 punten) Laat zien dat het het beeld van T inderdaad bevat is in $[0,\tau]$. **Antw:** $T(101010\ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\tau^{2n}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\tau^2}} = \tau$.

4. (4 punten) Laat zien dat T niet injectief is. HINT: bekijk het inverse beeld van 1. **Antw:** $T(01010101\ldots) = T(10000\ldots) = 1$.

We leggen een metriek d op Σ' door

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) = |\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{\tau^i}|,$$

en benadrukken dat de absolute waarde buiten de som staat. A priori is het misschien niet duidelijk dat dit een metriek is, maar dit mag je als aanname voor de opgaven gebruiken. De metriek is zo gekozen dat

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}},(t_i)_{i\in\mathbb{N}}) = |T\left((s_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) - T\left((t_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)|,$$

waaruit volgt dat T continu is. Bovendien geldt dat T surjectief is. Dit mag je voor de volgende opgaven gebruiken.

Zij $\sigma : \Sigma' \to \Sigma' : (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (s_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ de shift. We hebben nu de afbeeldingen:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "T"'] & \Sigma' \arrow[d, "T"'] \\
{[0,\tau]} \arrow[r, "f"] & {[0,\tau]}.
\end{tikzcd}$$

5. (8 punten) Laat door middel van een directe berekening zien dat $f \circ T((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) = T\circ\sigma((s_i)_{i\in\mathbb{N}})$ voor alle $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma' \setminus \{(10000\ldots)\}$. HINT: laat beide afbeeldingen los op een rij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en beschouw de gevallen $s_0 = 0$ en $s_0 = 1$ apart. **Antw:** $T\circ\sigma((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{i+1}}{\tau^i}$.

   Als $s_0 = 0$, dan $T((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) \le 1$, dus $f\circ T((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{s_{i+1}}{\tau^i}$. Als $s_0 = 1$ en $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \neq (100\ldots)$, dan $T((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in I_1$, dus $f\circ T((s_i)_{i\in\mathbb{N}}) = -\tau + \sum_{i=-1}^{\infty}\frac{s_{i+1}}{\tau^i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{s_{i+1}}{\tau^i}$.

6. (4 punten) Bewijs het volgende: zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma'$ en stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \le i \le N$. Dan $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}},(t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \le \frac{1}{\tau^{N-1}}$.

   Antw: $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}},(t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\tau^n} = \frac{1}{\tau^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{\tau}} = \frac{1}{\tau^{N-1}}$.

7. (8 punten) Laat zien dat de periodieke punten van σ dicht liggen in Σ'. **Antw:** Zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma'$ en $\epsilon > 0$. Kies N zdd $\frac{1}{\tau^{N-1}} < \epsilon$. Neem $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} = (s_0s_1s_2\ldots s_N0\ s_0s_1s_2\ldots s_N0\ \ldots)$. Dan $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma'$ (!!) is periodiek en met de vorige opgave $d((t_i)_{i\in\mathbb{N}},(s_i)_{i\in\mathbb{N}}) < \epsilon$.

8. (8 punten) Laat zien dat de periodieke punten van f dicht liggen in $[0,\tau]$. Zij $x \in [0,\tau]$. **Antw:** Kies $s \in \Sigma'$ met $T(s) = x$ (T is surjectief). Neem $t_n \in \Sigma'$ een rij die convergeert naar s (opgave 7). Dan $T(t_n)$ convergeert naar $T(s) = x$ (T is continu). Vanwege opgave 5 is $T(t_n)$ periodiek.

Opgave 3

(**Totaal 16 punten**). We beschouwen de volgende functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welke buiten het interval $[0, 6]$ gedefineerd is door:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \forall x < 0 \\ 0 & \forall x > 6 \end{cases}$$

en binnen het interval $[0, 6]$ door de stuksgewijs lineaire functie:

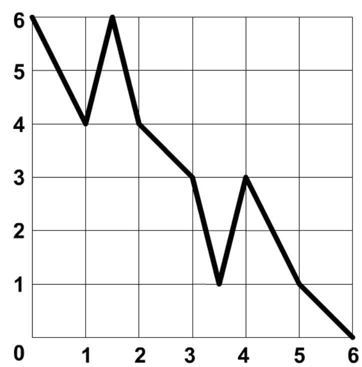

Figure 2: Grafiek van $f(x)$ op $[0, 6]$ behordende bij opgave 3.

1. (5 punten) Laat zien dat de functie precies 1 vast punt heeft en dat alle andere periodieke punten even priemperiode hebben. **Antw:** $f([0, 3]) = [3, 6], f([3, 6]) = [0, 3]$. Als $x \in [0, 3]$ periodiek met oneven periode n, dan $[0, 3] \ni x = f^n(x) \in [3, 6]$, dus $x = 3$.

2. (11 punten) Laat zien dat er voor iedere even $n \in \mathbb{N}^*$ een punt $x \in \mathbb{R}$ is, zodanig dat x periodiek is van priemperiode n. Hint: gebruik de stelling van Sarkovskii. **Antw:** Volgens Sarkovskii is het voldoende een periodiek punt van priemperiode 6 te vinden. We hebben

   $[0, 1] \subseteq f([5, 6]), [4, 5] \subseteq f([0, 1]), [1, 3] \subseteq f([4, 5]), [3, 6] \subseteq f([1, 3]), [0, 3] \subseteq f([3, 6]), [3, 6] \subseteq f([0, 3])$. Dus er is een $x \in [5, 6], f^6(x) = x$ en $f^2(x) \in [4, 5]$ (zie hoofdstuk 10). x is niet van periode 3 (opdracht 1). x is niet van periode 2, anders $x = 5$, maar 5 is niet periodiek. Dus x heeft priemperiode 6.

   Opmerking: op het tentamen heeft iemand $\frac{9}{7}$ als concreet voorbeeld gegeven van priemperiode 6.