Tentamen Dynamische Systemen

29 juni 2010, 14.00u - 17.00u, Examenzaal

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Daar waar een plaatje is gegeven, mag je gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Anders niet, tenzij dit anders aangegeven is. Resultaten uit het boek 'An introduction to chaotic dynamical systems' van Robert L. Devaney mogen gebruikt worden, tenzij deze expliciet gevraagd worden. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1

We bekijken de serie van functies geparametriseerd door $c \in \mathbb{R}$ gedefineerd door:

$$H_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c \cdot (\sqrt[3]{x-1} + 1).$$

1. **(5 pt)** Bereken de vaste punten van $H_1(x)$ en schets de grafiek van $H_1(x)$.
2. **(10 pt)** Laat zien dat bij $c = -3$ een bifurcatie optreedt en geef de waarde van x waarbij de bifurcatie optreedt. Benoem ook het type bifurcatie.
3. **(10 pt)** Laat zien dat er bij $c = \frac{3}{4}$ een bifurcatie optreedt te $x = \frac{9}{8}$. Benoem het type bifurcatie.
4. **(10 pt)** Zij nu $c < 0$. Laat zien dat $H_1(x)$ en $H_c(x)$ niet topologisch geconjugeerd zijn. Je mag een argument geven op basis van een schets van de grafiek van H_c.

Opgave 2

We beschouwen de volgende stuksgewijs lineaire functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die voor $x < 0$ en $x > 4$ gegeven wordt door $f(x) = 2$. Voor $x \in [0, 4]$ wordt de functie gegeven door een stuksgewijs lineaire functie

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 2x & x \in [0,1] \\ 6 - 2x & x \in [1,3] \\ 2x - 6 & x \in [3,4], \end{cases}$$

met grafiek gegeven in Figuur 1. In het bijzonder is f continu.

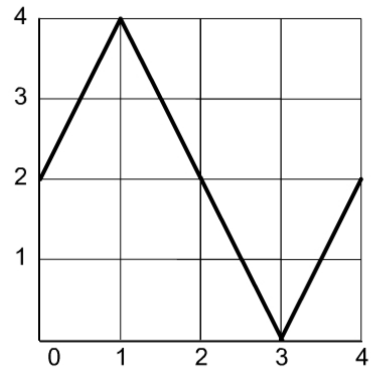

Figure 1: Grafiek van $f(x)$ behordende bij opgave 2.

1. **(5 pt)** Laat zien dat $f(x)$ behalve het vaste punt $x = 2$ alleen periodieke punten heeft van even periode.
2. **(15 pt)** Laat zien dat er voor iedere even $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ een punt $x \in \mathbb{R}$ is, zodanig dat x periodiek is met priemperiode n.

Opgave 3

Zij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door:

$$g(x) = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ 2 + x & 0 \le x \le \frac{7}{4} \\ 9 - 3x & x > \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Zie ook de grafiek in figuur 2. Zij nu

$$\Lambda = \{x \in [0,1] \mid \forall n \in \mathbb{N} : \ g^n(x) \in [0,3]\} .$$

en defineer $I_0 = [0,1]$, $I_1 = [2,3]$. Net als in het boek, zij Σ_2 de verzameling van oneindige rijtjes van nullen en enen:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}\} ,$$

en zij $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2 : (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (s_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ de shift afbeelding. Zij Σ' de deelverzameling van Σ_2 die bestaat uit de rijtjes zonder twee opeenvolgende nullen, dus formeel:

$$\Sigma' := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}, \quad s_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = 1\} .$$

Merk op dat σ beperkt tot Σ' een afbeelding $\sigma : \Sigma' \to \Sigma'$ geeft. We leggen een metriek d op Σ_2 (en daarmee door beperking ook op Σ') door

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

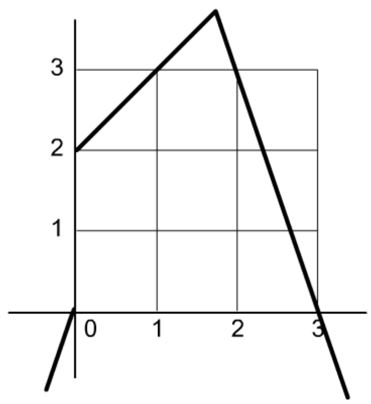

Figure 2: Grafiek van $g(x)$ behordende bij opgave 2.

Het boek geeft een bewijs van het volgende. Zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_2$. Stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \leq i \leq N$. Dan $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \leq \frac{1}{2^N}$. Andersom, als $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}), (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) < \frac{1}{2^N}$ voor zekere $N \in \mathbb{N}$, dan $s_i = t_i$ voor alle $i \leq N$.

1. **(10 pt)** Bewijs dat de periodieke punten van $\sigma : \Sigma' \to \Sigma'$ dicht liggen in Σ'.

2. **(5 pt)** Zij $S : \Lambda \to \Sigma_2 : x \mapsto (s_0, s_1, \ldots)$ met $s_i = k$ als $g^i(x) \in I_k$. Bewijs dat het beeld van S bevat is in Σ'.

Men kan bewijzen dat $S : \Lambda \to \Sigma'$ een homeomorfisme is en dat $S \circ g = \sigma \circ S$. Dit mag je voor de volgende opgaven gebruiken. Merk verder op dat g beperkt tot Λ een afbeelding $g : \Lambda \to \Lambda$ geeft.

3. **(10 pt)** Laat zien dat de periodieke punten van $g : \Lambda \to \Lambda$ dicht liggen in Λ.

4. **(10 pt)** Bewijs dat $g : \Lambda \to \Lambda$ gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden heeft. Hint: er zijn meerdere oplossingen mogelijk. Een mogelijkheid is om gebruik te maken van de injectiviteit van S en de relatie $S \circ g = \sigma \circ S$.

Tentamen Dynamische Systemen

29 juni 2010, 14.00u - 17.00u, Examenzaal

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Daar waar een plaatje is gegeven, mag je gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Anders niet, tenzij dit anders aangegeven is. Resultaten uit het boek 'An introduction to chaotic dynamical systems' van Robert L. Devaney mogen gebruikt worden, tenzij deze expliciet gevraagd worden. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1

We bekijken de serie van functies geparametriseerd door $c \in \mathbb{R}$ gedefineerd door:

$$H_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c \cdot (\sqrt[3]{x-1} + 1).$$

1. **(5 pt)** Bereken de vaste punten van $H_1(x)$ en schets de grafiek van $H_1(x)$. **Antw:** $H_1(x) = x$ geeft een derde graadsvergelijking. De vaste punten zijn 0, 1 en 2. Schets is een grafiek van $x \mapsto^3 \sqrt{x}$ die 1 naar rechts en 1 naar boven verschoven is.

2. **(10 pt)** Laat zien dat bij $c = -3$ een bifurcatie optreedt en geef de waarde van x waarbij de bifurcatie optreedt. Benoem ook het type bifurcatie. **Antw:** $x = 0$, period-doubling bifurcatie. Check de voorwaarden van Stelling 12.7.

3. **(10 pt)** Laat zien dat er bij $c = \frac{3}{4}$ een bifurcatie optreedt te $x = \frac{9}{8}$. Benoem het type bifurcatie. **Antw:** Saddle-node bifurcatie. Check de voorwaarden van Stelling 12.6.

4. **(10 pt)** Zij nu $c < 0$. Laat zien dat $H_1(x)$ en $H_c(x)$ niet topologisch geconjugeerd zijn. Je mag een argument geven op basis van een schets van de grafiek van H_c. **Antw:** $H_c(x)$ heeft 1 vast punt (plaatje), $H_1(x)$ heeft er 3 (eerste opgave). Gezien een topologische conjugatie een homeomorfisme geeft die vaste punten op vaste punten afbeeldt en het aantal vaste punten voor $H_c(x)$ en $H_1(x)$ verschillend is, kunnen de functies niet topologisch geconjugeerd zijn.

Opgave 2

We beschouwen de volgende stuksgewijs lineaire functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die voor $x < 0$ en $x > 4$ gegeven wordt door $f(x) = 2$. Voor $x \in [0, 4]$ wordt de functie gegeven door een stuksgewijs lineaire functie

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 2x & x \in [0, 1] \\ 6 - 2x & x \in [1, 3] \\ 2x - 6 & x \in [3, 4], \end{cases}$$

met grafiek gegeven in Figuur 1. In het bijzonder is f continu.

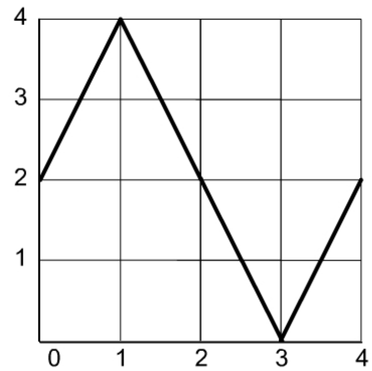

Figure 1: Grafiek van $f(x)$ behordende bij opgave 2.

1. **(5 pt)** Laat zien dat $f(x)$ behalve het vaste punt $x = 2$ alleen periodieke punten heeft van even periode. **Antw:** Als n oneven is en $x \in [0, 2]$, dan $f^n(x) \in [2, 4]$. Dus als $f^n(x) = x$, dan $x = 2$.

2. **(15 pt)** Laat zien dat er voor iedere even $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ een punt $x \in \mathbb{R}$ is, zodanig dat x periodiek is met priemperiode n. **Antw:** $[0, 1] \to [2, 3] \to [1, 2] \to [2, 3] \to [1, 2] \to [2, 3] \to [0, 1]$. Dus er is een $x \in [0, 1]$ zodanig dat $f^6(x) = x$ en $f^2(x) \in [1, 2]$. x is periodiek van periode 6. x heeft niet periode 3 (eerste opgave). x heeft niet periode 1 (er is maar 1 vast punt, plaatje), x heeft niet periode 2, anders omdat $x \in [0, 1]$ en $x = f^2(x) \in [1, 2]$ geldt $x = 1$, maar 1 is niet periodiek (direct uit te rekenen). Dus 6 is de priemperiode van x.

Opgave 3

Zij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door:

$$g(x) = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ 2 + x & 0 \leq x \leq \frac{7}{4} \\ 9 - 3x & x > \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Zie ook de grafiek in figuur 2. Zij nu

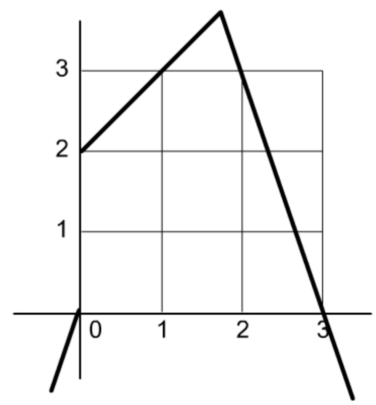

Figure 2: Grafiek van $g(x)$ behordende bij opgave 2.

$$\Lambda = \{x \in [0,1] \mid \forall n \in \mathbb{N} : \; g^n(x) \in [0,3]\}\,.$$

en defineer $I_0 = [0,1]$, $I_1 = [2,3]$. Net als in het boek, zij Σ_2 de verzameling van oneindige rijtjes van nullen en enen:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}\}\,,$$

en zij $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2 : (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (s_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ de shift afbeelding. Zij Σ' de deelverzameling van Σ_2 die bestaat uit de rijtjes zonder twee opeenvolgende nullen, dus formeel:

$$\Sigma' := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}, \quad s_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = 1\}\,.$$

Merk op dat σ beperkt tot Σ' een afbeelding $\sigma : \Sigma' \to \Sigma'$ geeft. We leggen een metriek d op Σ_2 (en daarmee door beperking ook op Σ') door

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Het boek geeft een bewijs van het volgende. Zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_2$. Stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \leq i \leq N$. Dan $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \leq \frac{1}{2^N}$. Andersom, als $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}), (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) < \frac{1}{2^N}$ voor zekere $N \in \mathbb{N}$, dan $s_i = t_i$ voor alle $i \leq N$.

1. **(10 pt)** Bewijs dat de periodieke punten van $\sigma : \Sigma' \to \Sigma'$ dicht liggen in Σ'. **Antw:** Opgave in hoofdstuk 5.

2. **(5 pt)** Zij $S : \Lambda \to \Sigma_2 : x \mapsto (s_0, s_1, \ldots)$ met $s_i = k$ als $g^i(x) \in I_k$. Bewijs dat het beeld van S bevat is in Σ'. **Antw:** Stel $S(x) = (s_0, s_1, \ldots)$ en stel s_i =0 voor zekere i. Dan $g^i(x) \in [0,1]$ en dus $g^{i+1}(x) \in [2,3]$ (plaatje). Dus $s_{i+1} = 1$.

Men kan bewijzen dat $S : \Lambda \to \Sigma'$ een homeomorfisme is en dat $S \circ g = \sigma \circ S$. Dit mag je voor de volgende opgaven gebruiken. Merk verder op dat g beperkt tot Λ een afbeelding $g : \Lambda \to \Lambda$ geeft.

3. **(10 pt)** Laat zien dat de periodieke punten van $g : \Lambda \to \Lambda$ dicht liggen in Λ. **Antw:** Zij $x \in \Lambda$ en zij $\epsilon > 0$. Kies een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $s \in \Sigma'$ met $d(s, S(x)) < \delta$ geldt dat $|S^{-1}(s) - x| < \epsilon$ (dat kan, want S^{-1} is continu). Kies nu voor s een periodiek punt in Σ' zodanig dat $d(s, S(x)) < \delta$ (eerste opgave). Dan is $S^{-1}(s)$ periodiek en $|S^{-1}(s) - x| < \epsilon$.

4. **(10 pt)** Bewijs dat $g : \Lambda \to \Lambda$ gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden heeft. Hint: er zijn meerdere oplossingen mogelijk. Een mogelijkheid is om gebruik te maken van de injectiviteit van S. **Antw:** Kies $\delta = \frac{1}{2}$. Zij $x \in \Lambda$ en zij $N(\subseteq \Lambda)$ een omgeving van x. Kies $y \in N$ willekeurig en kies $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $(S(y))_n \neq (S(x))_n$ (S is injectief). Dan zitten $g^n(x)$ en $g^n(y)$ in een ander interval I_k (evt. met relatie $S \circ g = \sigma \circ S$, maar volgt ook uit definitie van S). Dus zeker $|g^n(x) - g^n(y)| > \frac{1}{2} = \delta$.