Tentamen Dynamische Systemen

24 augustus 2011

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Daar waar een plaatje is gegeven, mag je gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Anders niet, tenzij dit anders aangegeven is. Resultaten uit het boek 'An introduction to chaotic dynamical systems' van Robert L. Devaney mogen gebruikt worden, tenzij deze expliciet gevraagd worden. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1: Periodieke punten van functies

1. **(10ptn)** Zij gegeven een bijectieve functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zij $x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $f^n(x) = x$ en $f^m(x) = x$. Zij $k = \mathrm{ggd}(m, n)$. Bewijs dat $f^k(x) = x$.

   Opmerking: Als je gebruik maakt van de bijectiviteit van f, geef dan expliciet aan waar je dat doet! Het resultaat is ook waar voor niet bijectieve f, maar dit hoef je niet per sé te bewijzen.

2. **(5ptn)** Zij f, x, m, n en k als in de vorige opgave. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: k is de priemperiode van x.

3. **(5ptn)** Stel dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is en een periodiek punt heeft van priemperiode 2011. Laat zien dat g een periodieke punt heeft van priemperiode $2012, 2013, 2014, \ldots$. Geef daartoe expliciet de ordening die gebruikt wordt voor Sarkovskii's stelling.

Opgave 2: Symbolische dynamica

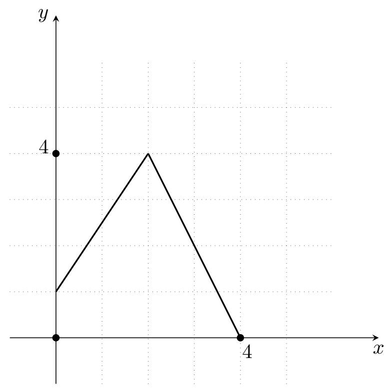
Zij Σ_2 als in het boek. Dus Σ_2 bestaat uit oneindige rijtjes van 0-en en 1-en. Dus formeel:

$$\Sigma_2 = \{(s_0, s_1, s_2, \ldots) \mid s_i \in \{0, 1\}\}.$$

We definieren de metriek d op Σ_2 als in het boek:

$$d((s_0, s_1, s_2, \ldots), (t_0, t_1, t_2, \ldots)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Het boek geeft het volgende lemma:



Figuur 1: De grafiek van f.

Lemma 1. *Zij* $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, \ldots), \mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in \Sigma_2$ *en* $n \in \mathbb{N}$. *Als* $s_i = t_i$ *voor alle* $0 \leq i \leq n$, *dan* $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^n}$. *Andersom, als* $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \frac{1}{2^n}$, *dan* $s_i = t_i$ *voor alle* $0 \leq i \leq n$.

1. **(10ptn)** Geef een bewijs van dit lemma.

We definieren Σ' als de deelverzameling van rijtjes in Σ_2 waarvoor geldt dat als er twee 0-en naast elkaar staan, dan is het volgende getal een 1. Formeel:

$$\Sigma' = \{(s_0, s_1, s_2, \ldots) \in \Sigma_2 \mid \forall i \in \mathbb{N} : (s_i = s_{i+1} = 0 \Rightarrow s_{i+2} = 1)\}.$$

Zij $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2 : (s_0, s_1, s_2, \ldots) \mapsto (s_1, s_2, \ldots)$ de shift afbeelding. Het is duidelijk dat σ beperkt kan worden tot een afbeelding $\Sigma' \to \Sigma'$.

2. **(5ptn)** Geef een voorbeeld van twee rijtjes $(s_0, s_1, s_2, \ldots), (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in \Sigma'$ waarvoor $d((s_0, s_1, s_2, \ldots), (t_0, t_1, t_2, \ldots)) = 2$. Let op: zorg dat de rijtjes niet alleen in Σ_2 zitten.

3. **(10ptn)** Laat zien dat Σ' een gesloten deelverzameling is van Σ_2.

4. **(10ptn)** Laat zien dat de periodieke punten van $\sigma : \Sigma' \to \Sigma'$ dicht liggen in Σ'.

We bekijken nu de functie

$$f : [0,4] \to [0,4] : x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}x & \text{als } 0 \leq x < 2, \\ 8 - 2x & \text{als } 2 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

waarvan de grafiek is afgebeeld in Figuur 1. Zij $I_0 = [0, 2)$ en zij $I_1 = [2, 4]$. Zij $S : [0, 4] \to \Sigma_2$ gegeven door $S(x) = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$, waarbij $s_i = k$ als $f^i(x) \in I_k$. De functie S is continu. Dit is niet triviaal, maar mag je wel gebruiken.

5. **(10ptn)** Laat zien dat het beeld van S in Σ' ligt.

6. **(5ptn)** Laat zien dat $S \circ f = \sigma \circ S$.

Opgave 3: Bifurcaties

Beschouw de functie:

$$f_\lambda(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \lambda.$$

1. **(10ptn)** Men kan precies maken dat er voor zekere $\lambda < -1$ een bifurcatie optreedt van één van de twee bekende types: de 'saddle-node bifurcatie' of de 'period-doubling bifrucatie'. Geef aan welke van de twee bifurcaties optreedt en beargumenteer je antwoord met behulp van een grafiek schets. Je hoeft niet noodzakelijk het bifurcatiepunt uit te rekenen.

2. **(10ptn)** Voor zekere $\lambda > -1$ treedt een andere bifurcatie op. Geef de waarde van deze λ, geef de bijbehorende waarde van het vaste punt x waarin de bifurcatie optreedt en benoem het type bifurcatie.

Tentamen Dynamische Systemen

24 augustus 2011

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Daar waar een plaatje is gegeven, mag je gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Anders niet, tenzij dit anders aangegeven is. Resultaten uit het boek 'An introduction to chaotic dynamical systems' van Robert L. Devaney mogen gebruikt worden, tenzij deze expliciet gevraagd worden. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1: Periodieke punten van functies

1. **(10ptn)** Zij gegeven een bijectieve functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zij $x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $f^n(x) = x$ en $f^m(x) = x$. Zij $k = \mathrm{ggd}(m, n)$. Bewijs dat $f^k(x) = x$.

   Opmerking: Als je gebruik maakt van de bijectiviteit van f, geef dan expliciet aan waar je dat doet! Het resultaat is ook waar voor niet bijectieve f, maar dit hoef je niet per se te bewijzen.

   Voor alle $c \in \mathbb{Z}$ geldt $f^{cn}(x) = x$. Hier gebruik je bijectiviteit zodra $c < 0$. Er zijn $a, b \in \mathbb{Z}$ zodat $am + bn = k$. Nu is $f^k(x) = f^{am+bn}(x) = f^{am}(f^{bn}(x)) = x$

2. **(5ptn)** Zij f, x, m, n en k als in de vorige opgave. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: k is de priemperiode van x.

   $f(x) = x, m = 4, n = 8$. *Omdat* $\mathrm{ggd}(m, n) = 4\ldots$

3. **(5ptn)** Stel dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is en een periodiek punt heeft van priemperiode 2011. Laat zien dat g een periodieke punt heeft van priemperiode $2012, 2013, 2014, \ldots$. Geef daartoe expliciet de ordening die gebruikt wordt voor Sarkovskii's stelling.

   Gebruik de stelling en de voorgeschreven ordening uit het boek. De machten van twee staan achteraan.

Opgave 2: Symbolische dynamica

Zij Σ_2 als in het boek. Dus Σ_2 bestaat uit oneindige rijtjes van 0-en en 1-en. Dus formeel:

$$\Sigma_2 = \{(s_0, s_1, s_2, \ldots) \mid s_i \in \{0,1\}\}.$$

We definieren de metriek d op Σ_2 als in het boek:

$$d((s_0, s_1, s_2, \ldots), (t_0, t_1, t_2, \ldots)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Het boek geeft het volgende lemma:

Lemma 1. *Zij* $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, \ldots), \mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in \Sigma_2$ *en* $n \in \mathbb{N}$. *Als* $s_i = t_i$ *voor alle* $0 \leq i \leq n$, *dan* $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^n}$. *Andersom, als* $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \frac{1}{2^n}$, *dan* $s_i = t_i$ *voor alle* $0 \leq i \leq n$.

1. **(10ptn)** Geef een bewijs van dit lemma.

Veronderstel $t_i = s_i$ *voor* $0 \leq i \leq n$. *Dan is* $d(s,t) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-n}$. *Omgekeerd, als* $d(s,t) < 2^{-n}$ *en* $s_i \neq t_i$ *voor zekere* $0 \leq i \leq n$ *dan* $d(s,t) \geq 2^{-i} \geq 2^{-n}$, *tegenspraak.*

We definieren Σ' als de deelverzameling van rijtjes in Σ_2 waarvoor geldt dat als er twee 0-en naast elkaar staan, dan is het volgende getal een 1. Formeel:

$$\Sigma' = \{(s_0, s_1, s_2, \ldots) \in \Sigma_2 \mid \forall i \in \mathbb{N} : (s_i = s_{i+1} = 0 \Rightarrow s_{i+2} = 1)\}.$$

Zij $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2 : (s_0, s_1, s_2, \ldots) \mapsto (s_1, s_2, \ldots)$ de shift afbeelding. Het is duidelijk dat σ beperkt kan worden tot een afbeelding $\Sigma' \to \Sigma'$.

2. **(5ptn)** Geef een voorbeeld van twee rijtjes $(s_0, s_1, s_2, \ldots), (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in \Sigma'$ waarvoor $d((s_0, s_1, s_2, \ldots), (t_0, t_1, t_2, \ldots)) = 2$. Let op: zorg dat de rijtjes niet alleen in Σ_2 zitten.

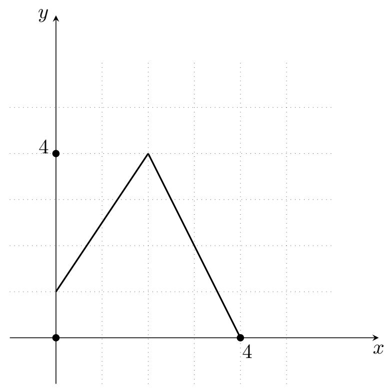
   Neem bijvoorbeeld $(10101010\ldots)$ *en* $(01010101\ldots)$.

3. **(10ptn)** Laat zien dat Σ' een gesloten deelverzameling is van Σ_2.

   Neem een punt s *in de rand van* Σ' *en veronderstel* $s \notin \Sigma'$. *Zij* i *minimaal voor de eigenschap* $s_i = s_{i+1} = s_{i+2} = 0$. *Kies* $0 < \epsilon < 2^{-i-3}$. *Omdat er een* $s' \in \Sigma'$ *is met* $d(s, s') < \epsilon$ *moet voor deze* s' *gelden dat de eerste* $i+3$ *digits gelijk zijn aan die van* s. *Dat is een tegenspraak, dus* $s \in \Sigma'$.

4. **(10ptn)** Laat zien dat de periodieke punten van $\sigma : \Sigma' \to \Sigma'$ dicht liggen in Σ'.

   De periodieke punten P' *van* σ' *bestaan precies uit de periodieke punten* P *van* σ *doorsneden met* Σ', *i.e.* $P' = \Sigma' \cap P$. *Er geldt dat* $\overline{P \cap \Sigma'} = \overline{P} \cap \overline{\Sigma'} = \Sigma'$.



Figuur 1: De grafiek van f.

We bekijken nu de functie

$$f : [0,4] \to [0,4] : x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}x & \text{als } 0 \leq x < 2, \\ 8 - 2x & \text{als } 2 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

waarvan de grafiek is afgebeeld in Figuur 1. Zij $I_0 = [0,2)$ en zij $I_1 = [2,4]$. Zij $S : [0,4] \to \Sigma_2$ gegeven door $S(x) = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$, waarbij $s_i = k$ als $f^i(x) \in I_k$. De functie S is continu. Dit is niet triviaal, maar mag je wel gebruiken.

5. **(10ptn)** Laat zien dat het beeld van S in Σ' ligt.

   Stel $s_i = s_{i+1} = 0$. Dan $f^i(x) \in f^{-1}(I_0) \cap I_0 = [0, \frac{2}{3}]$ dus $f^i(x) \in [1,2]$ en dus $fi + 1(x) \in I_1$.

6. **(5ptn)** Laat zien dat $S \circ f = \sigma \circ S$.

   $Sf(x) = (t_0, \ldots)$ waar $f^{i+1}(x) \in I_{t_i}$ terwijl $\sigma S(x) = (s_1, \ldots)$ met $f^{i+1}(x) \in I_{s_{i+1}}$. Dus $t_i = s_{i+1}$ voor $i = 0, \ldots$.

Opgave 3: Bifurcaties

Beschouw de functie:

$$f_\lambda(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \lambda.$$

1. **(10ptn)** Men kan precies maken dat er voor zekere $\lambda < -1$ een bifurcatie optreedt van één van de twee bekende types: de 'saddle-node bifurcatie' of de 'period-doubling bifrucatie'. Geef aan welke van de twee bifurcaties optreedt en beargumenteer je antwoord met behulp van een grafiek schets.

Je hoeft niet noodzakelijk het bifurcatiepunt uit te rekenen.

Dit is het omhoog en omlaag schuiven van $\cosh$. *Als* $\lambda < -1$ *dan treedt er een periodeverdubbelingsbifurcatie op zodra* $\cosh'(x) = -1$ *en* x *een vast punt van* f_λ. *Dit gebeurt als je* $\lambda < -1$ *maar klein genoeg neemt.*

2. **(10ptn)** Voor zekere $\lambda > -1$ treedt een andere bifurcatie op. Geef de waarde van deze λ, geef de bijbehorende waarde van het vaste punt x waarin de bifurcatie optreedt en benoem het type bifurcatie.

   Dit is het omhoog en omlaag schuiven van $\cosh$. *Ten duidelijkste is er voor* $\lambda \in (-1, 0)$ *een zadelpuntbifurcatie- op het moment dat er een vast punt verschijnt en meteen overgaat in twee vaste punten. Dan is in de eerste plaats* $\cosh'(x) = 1$ *en dat is juist als* $x = \log(1 + \sqrt{2})$. *Dit is precies een vast punt als* $\lambda = \log(1 + \sqrt{2}) - \cosh(\log(1 + \sqrt{2}))$.