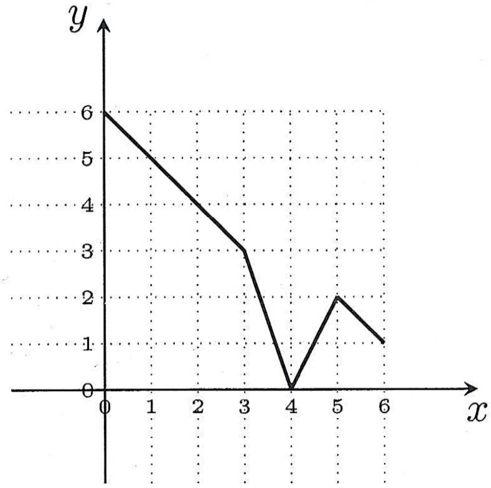
Tentamen Dynamische Systemen

13 augustus 2012

Zet duidelijk je naam en studentnummer boven ieder vel dat je inlevert. Daar waar een plaatje is gegeven, mag je gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Anders niet, tenzij dit anders aangegeven is. Resultaten uit het boek 'An introduction to chaotic dynamical systems' van Robert L. Devaney mogen gebruikt worden, tenzij deze expliciet gevraagd worden. Een rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1: Periodieke punten

Zij $f : [0,6] \to [0,6]$ de stuksgewijs lineaire functie gegeven door de volgende figuur.



Figuur 1: De grafiek van f.

1. (5 pt) Bewijs dat f geen periodieke punten heeft van oneven priemperiode, behalve $x = 3$.
2. (10 pt) Laat zien dat f een periodiek punt heeft van priemperiode 2012.

Opgave 2: Bifurcaties en structurele stabiliteit

Voor $\lambda \in \mathbb{R}$, zij

$$F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda((x-1)^3 + 1)$$

1. (5pt) Maak een grafiekschets van F_1.
2. (10pt) Bewijs dat $F_{\frac{1}{3}}$ niet structureel stabiel is. Het is eventueel toegestaan je antwoord toe te lichten aan de hand van een grafiekschets. HINT: het punt $x = 0$ is een niet-hyperbolisch vast punt van $F_{\frac{1}{3}}$.
3. (10pt) Te $\lambda = -\frac{1}{3}$ treedt er een bifurcatie op van één van de twee types die beschreven worden in Hoofdstuk 12 van het boek van Devaney. Geef de waarde van het vaste punt waarin de bifurcatie optreedt en benoem het type bifurcatie.
4. (15pt) Te $\lambda = \frac{4}{3}$ treedt er een bifurcatie op van één van de twee types die beschreven worden in Hoofdstuk 12 van het boek van Devaney. Geef de waarde van het vaste punt waarin de bifurcatie optreedt en benoem het type bifurcatie.

Opgave 3: Symbolische dynamica

Zij Σ_2 als in het boek:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}\}.$$

Merk op dat Σ_2 overaftelbaar veel elementen bevat. We leggen een metriek op Σ_2 door:

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n}.$$

We hebben nu het volgende lemma.

Lemma 1. Zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_2$ en stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \le i \le N$. Dan $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \le \frac{1}{2^N}$. Andersom, als $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) < \frac{1}{2^N}$, dan geldt dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \le i \le N$.

1. (10 pt) Bewijs Lemma 1.

Defineer nu een afbeelding $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ door

$$\begin{aligned}
\tau(0, s_1, s_2, s_3, \ldots) &\mapsto (1, s_1, s_2, s_3, \ldots) \\
\tau(1, 0, s_2, s_3, \ldots) &\mapsto (0, 1, s_2, s_3, \ldots) \\
&\vdots \\
\tau(1, 1, \ldots, 1, 0, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots) &\mapsto (0, 0, \ldots, 0, 1, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots) \\
&\vdots \\
\tau(1, 1, 1, \ldots) &\mapsto (0, 0, 0, \ldots)
\end{aligned}$$

Merk op dat τ is te interpreteren als een vorm van binaire optelling.

2. (10 pt) Bewijs dat de voorwaartse baan van $(0,0,0,\ldots)$ onder τ niet gelijk is aan Σ_2.
3. (15 pt) Bewijs dat de voorwaartse baan van $(0,0,0,\ldots)$ onder τ dicht ligt in Σ_2.