Tentamen Dynamische Systemen

25 juni 2012

Zet duidelijk je naam en studentnummer boven ieder vel dat je inlevert. Daar waar een plaatje is gegeven, mag je gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Anders niet, tenzij dit anders aangegeven is. Resultaten uit het boek 'An introduction to chaotic dynamical systems' van Robert L. Devaney mogen gebruikt worden, tenzij deze expliciet gevraagd worden. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1: Symbolische dynamica

Zij Σ_2 als in het boek:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}\}.$$

We leggen een metriek op Σ_2 door:

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n}.$$

Het boek geeft een bewijs van het volgende.

Lemma 1. Zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_2$ en stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \le i \le N$. Dan $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \le \frac{1}{2^N}$. Andersom, als $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) < \frac{1}{2^N}$, dan geldt dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \le i \le N$.

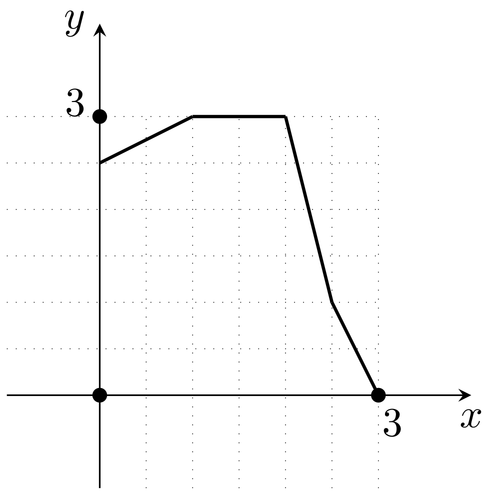
Zij nu Σ' de deelverzameling van Σ_2 gegeven door

$$\Sigma' := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\} \text{ en als } s_i = 0 \text{ dan } s_{i+1} = 1 \text{ en } s_{i+2} = 0\}.$$

1. (10 pt) Bewijs dat Σ' gesloten is.

Zij $f : [0,3] \to [0,3]$ de afbeelding gegeven door:

$$f(x) = \begin{cases} 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & x \in [0,1], \\ 3 & x \in [1,2], \\ 11 - 4x & x \in [2, 2\frac{1}{2}], \\ 6 - 2x & x \in [2\frac{1}{2}, 3]. \end{cases}$$



Figuur 1: De grafiek van f.

Defineer $I_0 = [0,1]$ en $I_1 = [2,3]$. Zij

$$\Lambda = \{x \in [0,3] \mid \forall n : f^n(x) \in I_0 \cup I_1\}.$$

We defineren $S : \Lambda \to \Sigma_2$ door

$$S(x) = (s_0, s_1, \ldots), \qquad s_n = i \text{ als } f^n(x) \in I_i.$$

2. (5 pt) Bewijs dat het beeld van S in Σ' bevat is.

3. (10 pt) Bewijs dat f geen periodiek punt heeft van priemperiode 370. Hint: Analyseer de functie en bepaal welke punten periodiek zijn.

Opgave 2: Chaos

Zij S^1 de eenheidscirkel in het complexe vlak. Dus $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ieder punt in S^1 kan dus gerepresenteerd worden door een getal $e^{i\theta}$, waarbij θ de hoek met de reële as in het complexe vlak is. Zij,

$$T : S^1 \to S^1 : e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta + i\pi}.$$

1. (10 pt) Bewijs dat T topologisch transitief is.

Defineer de functie,

$$F : [-1,1] \to [-1,1] : x \mapsto 1 - 2x^2,$$

Zij $h : S^1 \to [-1,1] : e^{i\theta} \mapsto \cos(\theta)$. De functie h is continu; dit mag eventueel gebruikt worden voor de volgende opgaves.

2. (5 pt) Laat zien dat $F \circ h = h \circ T$.
3. (10 pt) Bewijs dat F topologisch transitief is.

Bekijk nu voor $\lambda \in \mathbb{R}$ de functie

$$F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - 2x^2 + \lambda.$$

4. (10 pt) Voor $\lambda = -\frac{9}{8}$ treedt er een bifurcatie op. Geef de waarde van het vaste punt x waar de bifurcatie optreedt en benoem het type bifurcatie met behulp van een grafiekschets of stelling uit het boek.

Opgave 3: Structurele stabiliteit

1. (10 pt) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ twee functies die topologisch geconjugeerd zijn. Bewijs: als de functie f exact n verschillende vaste punten heeft, dan heeft g ook n verschillende vaste punten.
2. (10 pt) Laat zien dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(x)$ niet structureel stabiel is. Dat wil zeggen dat hij niet C^r-structureel stabiel is voor elke $r \in \mathbb{N}$. Het is bij deze opgave toegestaan om gebruik te maken van 'Graphical Analysis' om de vaste punten van een functie te vinden. Geef daartoe wel een duidelijke grafiekschets.

In het boek wordt de metriek d_1 voor alle C^1-functies $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door:

$$d_1(h, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|h(x) - g(x)|, |h'(x) - g'(x)|\}.$$

In het bijzonder voldoet d_1 aan de driehoeksongelijkheid. Dus, voor alle C^1-functies f, g en h, geldt $d_1(f, g) + d_1(g, h) \geq d_1(f, h)$. Zij nu

$$f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}x$$

In het boek wordt aangetoond dat voor elke C^1-functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $d_1(f, f_0) < \frac{1}{2}$ geldt dat f topologisch geconjugeerd is met f_0. Dit bewijst dus dat f_0 C^1-structureel stabiel is.

3. (10 pt) Zij nu $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(x)$. Bewijs dat f_1 C^1-structureel stabiel is.

Tentamen Dynamische Systemen

25 juni 2012

Zet duidelijk je naam en studentnummer boven ieder vel dat je inlevert. Daar waar een plaatje is gegeven, mag je gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Anders niet, tenzij dit anders aangegeven is. Resultaten uit het boek 'An introduction to chaotic dynamical systems' van Robert L. Devaney mogen gebruikt worden, tenzij deze expliciet gevraagd worden. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1: Symbolische dynamica

Zij Σ_2 als in het boek:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\}\}.$$

We leggen een metriek op Σ_2 door:

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n}.$$

Het boek geeft een bewijs van het volgende.

Lemma 1. Zij $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_2$ en stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \le i \le N$. Dan $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) \le \frac{1}{2^N}$. Andersom, als $d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (t_i)_{i\in\mathbb{N}}) < \frac{1}{2^N}$, dan geldt dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \le i \le N$.

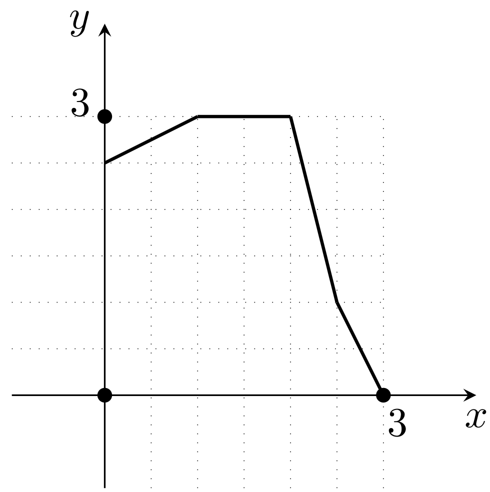
Zij nu Σ' de deelverzameling van Σ_2 gegeven door

$$\Sigma' := \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_i \in \{0,1\} \text{ en als } s_i = 0 \text{ dan } s_{i+1} = 1 \text{ en } s_{i+2} = 0\}.$$

1. (10 pt) Bewijs dat Σ' gesloten is.

Zij $f : [0,3] \to [0,3]$ de afbeelding gegeven door:

$$f(x) = \begin{cases} 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & x \in [0,1], \\ 3 & x \in [1,2], \\ 11 - 4x & x \in [2, 2\frac{1}{2}], \\ 6 - 2x & x \in [2\frac{1}{2}, 3]. \end{cases}$$



Figuur 1: De grafiek van f.

Defineer $I_0 = [0, 1]$ en $I_1 = [2, 3]$. Zij

$$\Lambda = \{x \in [0, 3] \mid \forall n : f^n(x) \in I_0 \cup I_1\}.$$

We defineren $S : \Lambda \to \Sigma_2$ door

$$S(x) = (s_0, s_1, \ldots), \qquad s_n = i \text{ als } f^n(x) \in I_i.$$

2. (5 pt) Bewijs dat het beeld van S in Σ' bevat is. **Antw:** Als $x \in [0, 1]$, dan volgt uit het plaatje dat $f(x) \in [2.5, 3]$ en dus $f^2(x) \in [0, 1]$. Zij $y \in \Lambda$ en zij $S(y) = (s_0, s_2, \ldots)$. Stel dat $s_n = 0$. Dan $f^n(y) \in I_0$. Uit voorgaande volgt dat $f^{n+1}(y) \in I_1$ en $f^{n+2}(y) \in I_2$. Per definitie geldt dan $s_{n+1} = 1$ en $s_{n+2} = 0$.

3. (10 pt) Bewijs dat f geen periodiek punt heeft van priemperiode 370. Hint: Analyseer de functie en bepaal welke punten periodiek zijn. **Antw:** Uit elementaire analyse van de functie kun je concluderen dat: Ieder punt uit $[0, 1] \cup [2.5, 3]$ is periodiek van periode 4. Ieder punt uit $[2, 3]$ is niet periodiek. Ieder punt uit $[2, 2.5]$ is óf het vaste punt, of de baan ontsnapt uit dit interval. Conclusie: de enige periodes die kunnen voorkomen zijn $1, 2$ of 4.

Opgave 2: Chaos

Zij S^1 de eenheidscirkel in het complexe vlak. Dus $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ieder punt in S^1 kan dus gerepresenteerd worden door een getal $e^{i\theta}$, waarbij θ

de hoek met de reële as in het complexe vlak is. Zij,

$$T : S^1 \to S^1 : e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta + i\pi}.$$

1. (10 pt) Bewijs dat T topologisch transitief is. **Antw:** Je moet bewijzen dat voor open verzamelingen $U, V \subseteq S^1$ geldt dat er een $n \in \mathbb{N}$ is zodanig dat $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Je mag aannemen dat U en V cirkelbogen zijn, want iedere openverzameling bevat een cirkelboog. $T(U)$ is dan een cirkelboog waarvan de booglengte twee keer zo groot is als die van U of $T(U) = S^1$. We concluderen dat er een $n \in \mathbb{N}$ is zodanig dat $T^n(U) = S^1$. Dan ook $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Defineer de functie,

$$F : [-1, 1] \to [-1, 1] : x \mapsto 1 - 2x^2,$$

Zij $h : S^1 \to [-1, 1] : e^{i\theta} \mapsto \cos(\theta)$. De functie h is continu; dit mag eventueel gebruikt worden voor de volgende opgaves.

2. (5 pt) Laat zien dat $F \circ h = h \circ T$. **Antw:** elementaire calculus.

3. (10 pt) Bewijs dat F topologisch transitief is. **Antw:** Zij $U, V \subseteq [-1, 1]$ open. We mogen aannemen dat U, V intervallen zijn. Dan zijn $h^{-1}(U)$ en $h^{-1}(V)$ delen van S^1 die allebei een cirkelboog bevatten (dit volgt uit de continuiteit van h, maar je kunt het ook eenvoudig aan de expliciete afbeelding h aflezen). Met een vorige opgave volgt dat er een n is zodanig dat $T^n(h^{-1}(U)) = S^1$. Nu is $F^n(U) = F^n(h(h^{-1}(U))) = h(T^n(h^{-1}(U))) = h(S^1) = [-1, 1]$. En dus $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Bekijk nu voor $\lambda \in \mathbb{R}$ de functie

$$F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - 2x^2 + \lambda.$$

4. (10 pt) Voor $\lambda = -\frac{9}{8}$ treedt er een bifurcatie op. Geef de waarde van het vaste punt x waar de bifurcatie optreedt en benoem het type bifurcatie met behulp van een grafiekschets of stelling uit het boek. **Antw:** Dit is $x = -\frac{1}{4}$. Een saddle-node bifurcatie (zadelpuntsbifurcatie).

Opgave 3: Structurele stabiliteit

1. (10 pt) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ twee functies die topologisch geconjugeerd zijn. Bewijs: als de functie f exact n verschillende vaste punten heeft, dan heeft g ook n verschillende vaste punten. **Antw:** Zij $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijectief zodanig dat $g \circ h = h \circ f$. Stel voor zekere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = x$. Dan geldt $g(h(x)) = h(f(x)) = h(x)$. Dus $h(x)$ is vast voor g. Stel dat f verschillende vaste punten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heeft, dan zijn $h(x_1), \ldots, h(x_n)$ n verschillende vaste punten van g (h is injectief). Dus g heeft minstens n vaste punten. Pas nu het argument toe met f en g verwisseld dan zie je dat g ook hooguit n vaste punten kan hebben.

2. (10 pt) Laat zien dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(x)$ niet structureel stabiel is. Dat wil zeggen dat hij niet C^r-structureel stabiel is voor elke $r \in \mathbb{N}$. Het is bij deze opgave toegestaan om gebruik te maken van 'Graphical Analysis' om de vaste punten van een functie te vinden. Geef daartoe wel een duidelijke grafiekschets. **Antw:** Zij $\epsilon > 0$. Kies $g_\epsilon = f(x) + \epsilon/2\sin(x)$. g_ϵ heeft minstens 3 vaste punten. f heeft slechts 1 vast punt. Conclusie f en g_ϵ zijn niet topologisch geconjugeerd. Maar er geldt $d_1(f, g_\epsilon) = \epsilon$. Dus voor iedere $\epsilon > 0$ is er een g met $d_1(f, g) < \epsilon$ maar niet f topologisch geconjugeerd met g. Dus f is niet structureel stabiel.

In het boek wordt de metriek d_1 voor alle C^1-functies $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door:

$$d_1(h, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|h(x) - g(x)|, |h'(x) - g'(x)|\}.$$

In het bijzonder voldoet d_1 aan de driehoeksongelijkheid. Dus, voor alle C^1-functies f, g en h, geldt $d_1(f, g) + d_1(g, h) \geq d_1(f, h)$. Zij nu

$$f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}x$$

In het boek wordt aangetoond dat voor elke C^1-functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $d_1(f, f_0) < \frac{1}{2}$ geldt dat f topologisch geconjugeerd is met f_0. Dit bewijst dus dat f_0 C^1-structureel stabiel is.

3. (10 pt) Zij nu $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(x)$. Bewijs dat f_1 C^1-structureel stabiel is. **Antw:** Kies $\delta = \frac{1}{4}$. Zij g zodanig dat $d_1(f_1, g) < \frac{1}{4}$. Dan $d_1(f_0, g) \leq d_1(f_0, f_1) + d_1(f_1, g) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Uit wat gegeven is, is f_0 topologisch geconjugeerd met g. Uit het gegeven volgt ook dat f_0 topologisch geconjugeerd is met f_1. Gezien topologische conjugatie een equivalentierelatie is (ihb transitief) geldt dat f_1 en g topologisch geconjugeerd zijn. Dit bewijst dat f_1 topologisch transitief is, met $\delta = \frac{1}{4}$.