Tentamen Eindig-dimensionale algebra's (WP073B) 21 januari 2013 (12:30-15:30).

Het is bij alle opgaven toegestaan gebruik te maken van alle resultaten bewezen in het boek, tenzij expliciet gevraagd. Alle algebra's in de opgaven zijn unitaal en associatief. Het tentamen bestaat uit 3 opgaven op één pagina. Succes!

1. **Algebra's, idealen en representaties**
   Stel A is een unitale algebra over k, en stel dat $I \subset A$ een tweezijdig ideaal is.

   ✓(a) Wanneer heet een algebra enkelvoudig (simple)?

   ✓(b) Laat zien dat A/I een unitale algebra is.

   (c) Bekijk de algebra A voortgebracht door x, x^{-1}, y met relaties

   $$x^{-1}x = xx^{-1} = 1; \qquad xy - yx = x$$

   Bewijs dat A geen eindig-dimensionale representaties heeft over een lichaam met karakteristiek 0.

   Stel A is eindig-dimensionaal. Herinner je dat het radicaal $\mathrm{Rad}(A)$ van een eindig-dimensionale algebra A bestaat uit de elementen die als 0 werken in alle irreducibele representaties van A.

   ✓(d) Laat zien dat het radicaal van een eindig-dimensionale algebra een tweezijdig ideaal is.

   (e) Bewijs dat de algebra $A/\mathrm{Rad}(A)$ halfenkelvoudig (semisimple) is.

2. **Lemma van Schur**
   Neem aan dat k algebraïsch gesloten is.

   ✓(a) Laat zien dat elke irreducibele representatie van een commutatieve algebra A één-dimensionaal is.

   * ✓(b) Laat A een algebra zijn, en laat V, W twee eindig-dimensionale, irreducibele representaties van A over k zijn. Neem aan dat V en W niet isomorf zijn. Bewijs dat de vectorruimte van intertwiners $\mathrm{Hom}_A(V \oplus W, V)$ isomorf is met k.

3. **Groepsalgebras**
   Stel G is een groep en k een lichaam. De groepsalgebra $k[G]$ is gedefinieerd als de vectorruimte met basis $\{a_g : g \in G\}$ en product

   $$a_g a_h = a_{gh}; \qquad (g, h \in G).$$

   ✓(a) Bewijs dat $k[G]$ een unitale associatieve algebra is.

   ✓(b) Laat zien dat $k[G]$ commutatief is dan en slechts dan als G abels is.

   (c) Laat zien dat een (algebra)representatie van $k[G]$ hetzelfde is als een (groeps)represenatie van G.

   ✓(d) Gebruik bovenstaande Opgave 2 om te bewijzen dat als $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en als k algebraisch gesloten en van karakteristiek p, dan is elke irreducibele representatie van G over k triviaal.