Herkansing Inl. Functionaalanalyse

1. Neem een vector-ruimte X (over $\mathbb{C}$) met norm $\|\cdot\|_X$, en definieer voor iedere functie $f : \mathbb{N} \to X$ de uitdrukking $\|f\| \in [0, \infty]$ door middel van
$$\|f\| := \sup \{\|f(n)\|_X, n \in \mathbb{N}\} .$$
Definieer vervolgens de verzameling
$$\ell^\infty(\mathbb{N}, X) := \{f : \mathbb{N} \to X,\ \|f\| < \infty\} .$$
   (a) Bewijs dat $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ een vector-ruimte is onder puntsgewijze operaties: de scalaire vermenigvuldiging van $t \in \mathbb{C}$ met $f \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ is gedefinieerd als $(tf)(n) := tf(n)$ en de optelling is $(f + g)(n) := f(n) + g(n)$ (waarbij het rechterlid zich steeds in X afspeelt!).
   (b) Bewijs dat de bovenstaande afbeelding $f \mapsto \|f\|$ een norm definieert op $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$.
   (c) Bewijs dat als X een Banach-ruimte is, dan $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ volledig is in bovenstaande norm.

2. Deze opgave gaat over de volgende Banach-ruimtes:
   - $\ell_0(\mathbb{N})$, de functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die voldoen aan $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ (heet ook wel c_0);
   - $\ell^1(\mathbb{N})$, de functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die voldoen aan $\sum_n |f(n)| < \infty$;
   - $\ell^2(\mathbb{N})$, de functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die voldoen aan $\sum_n |f(n)|^2 < \infty$;
   - $\ell^\infty(\mathbb{N})$, de begrensde functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$;
   - $B_0(\ell^2(\mathbb{N}))$, de compacte operatoren op $\ell^2(\mathbb{N})$ (deze heet ook vaak $K(\ell^2(\mathbb{N}))$);
   - $B_1(\ell^2(\mathbb{N}))$, de trace-class operatoren op $\ell^2(\mathbb{N})$;
   - $B(\ell^2(\mathbb{N}))$, de begrensde operatoren op $\ell^2(\mathbb{N})$.

   We laten $(\mathbb{N})$ verder weg, zodat ℓ^p betekent $\ell^p(\mathbb{N})$, enzovoort, en schrijven H i.p.v. ℓ^2.

   (a) Geef in al deze 7 gevallen de gebruikelijke norm op de gegeven ruimte.
   (b) Het is duidelijk dat *als verzamelingen* geldt $\ell^1 \subset \ell^0 \subset \ell^\infty$. Laat zien dat de bijbehorende afbeeldingen $\ell^1 \hookrightarrow \ell^0$ en $\ell^0 \hookrightarrow \ell^\infty$ *tussen Banach-ruimten* continu zijn.
   (c) *Als verzamelingen* geldt $B_1(H) \subset B_0(H) \subset B(H)$. Laat zien dat de bijbehorende afbeeldingen $B_1(H) \hookrightarrow B_0(H)$ en $B_0(H) \hookrightarrow B(H)$ *tussen Banach-ruimten* continu zijn.
   (d) Laat zien dat er een *isometrische* (en dus injectieve) afbeelding $\ell^1 \hookrightarrow B_1(H)$ bestaat (i.e., geef de afbeelding en bewijs dat deze isometrisch is).
   (e) Laat zien dat er een *isometrische* (*idem*) afbeelding $\ell^\infty \hookrightarrow B(H)$ bestaat (*idem*).
   (f) Geef de duale Banach-ruimte van ℓ_0 en geef ook van deze duale de duale Banach-ruimte.[1]
   (g) Zelfde twee vragen over $B_0(H)$.

- *Normering: alle deelopgaven leveren 1 punt op.*[2]
- *Je mag het boek, de syllabus, en eigen aantekeningen bij het tentamen gebruiken.*
- *Je hoeft bewijzen van resultaten in boek of syllabus niet te reproduceren, maar je moet stellingen die je gebruikt wel duidelijk citeren en laten zien dat aan de aannamen is voldaan. Je kunt **niet** naar een opgave uit de syllabus verwijzen zonder de uitwerking erbij te geven! Je kunt **wel** naar een opgave uit het boek verwijzen (de uitwerking staat immers achterin).*
- *De uitwerkingen staan vanaf vanavond op Blackboard.*

Veel succes!

[1] Schrijf je antwoorden op in de vorm $Y \cong X^*$ en geef daarbij aan hoe een gegeven $y \in Y$ expliciet wordt gerealiseerd als een lineaire afbeelding $y' : X \to \mathbb{C}$. Voorbeeld van een correct antwoord op deze vraag voor $X = H$: uit Theorem 5.2 in het boek volgt $H^* \cong H$, omdat H een Hilbert-ruimte is. Een element $\psi \in H$ geeft een element $\psi' \in H^*$ door middel van $\psi'(\varphi) = \langle\psi, \varphi\rangle$, het inproduct van ψ en φ.

[2] De welkomstbonus van 1 punt vervalt maar sommige antwoorden staan letterlijk in boek of syllabus.

Herkansing Inl. Functionaalanalyse

1. Neem een vector-ruimte X (over $\mathbb{C}$) met norm $\|\cdot\|_X$, en definieer voor iedere functie $f : \mathbb{N} \to X$ de uitdrukking $\|f\| \in [0, \infty]$ door middel van

$$\|f\| := \sup \{\|f(n)\|_X, n \in \mathbb{N}\}.$$

Definieer vervolgens de verzameling

$$\ell^\infty(\mathbb{N}, X) := \{f : \mathbb{N} \to X, \|f\| < \infty\}.$$

(a) Bewijs dat $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ een vector-ruimte is onder puntsgewijze operaties: de scalaire vermenigvuldiging van $t \in \mathbb{C}$ met $f \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ is gedefinieerd als $(tf)(n) := tf(n)$ en de optelling is $(f + g)(n) := f(n) + g(n)$ (waarbij het rechterlid zich steeds in X afspeelt!).

Nagaan dat:

- $tf \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ als $f \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$: volgt uit $\|tf\| = |t|\|f\|$, triviaal.
- $f + g \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ als $f, g \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$: gebruik de driehoeksongelijkheid voor $\| \cdot \|_X$,

$$\|f + g\| = \sup_n \{\|f(n) + g(n)\|_X\} \leq \sup_n \{\|f(n\|) + \|g(n)\|_X\} = \|f\| + \|g\|.$$

- nulvector: de functie $f(n) = 0_X$ voor alle n, waarbij 0_X de nulvector in X is.
- inverse: $-f$ is de functie $(-f)(n) = nf(n)$.

(b) Bewijs dat de bovenstaande afbeelding $f \mapsto \|f\|$ een norm definieert op $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$.

- driehoeksongelijkheid: zie boven.
- $\|tf\| = |t|\|f\|$: zie boven.
- $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$: uit $\|f\| = 0$ en def. sup-norm volgt $\|f(n)\|_X = 0$ voor alle n, omdat hier een norm in X staat volgt $f(n) = 0$ voor alle n, en dus $f = 0$.

(c) Bewijs dat als X een Banach-ruimte is, dan $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ volledig is in bovenstaande norm.

Kopieer bewijs voor $X = \mathbb{C}$. We moeten bewijzen dat een Cauchy-rij (f_k) convergeert. Dat gaat in drie stappen:

i. Vind een kandidaat f voor de limiet.
ii. Laat zien dat $f \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$.
iii. Laat zien dat $f_j \to f$ in $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$.

i. Neem Cauchy-rij (f_j) in $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$, dan volgt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall_{j,k>N} \, \sup_n \{\|f_j(n) - f_k(n)\|_X\} < \varepsilon. \qquad (*)$$

Dis voor iedere n is $(f_j(n))$ Cauchy in X, X is Banach dus volledig dus deze Cauchy-rij in X convergeert. Noem de limiet $f(n)$. Dit geeft een functie $f : \mathbb{N} \to X$, dus $f(n) = \lim_j f_j(n)$.

ii. Theorem 2.11(a) in boek, i.e., $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, geeft dat $\|(f_j)\|$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ is, die convergeert en dus $\sup_{j,n} \|f_j(n)\|_X < \infty$. Voor vaste $n \in \mathbb{N}$ geldt $\|f(n)\|_X \leq \|f(n) - f_j(n)\|_X + \|f_j(n)\|_X$. Neem in X de limiet $j \to \infty$, dit geeft $\|f(n)\|_X \leq \lim_j \|f_j(n)\|_X$. Tevens geldt $\lim_j \|f_j(n)\|_X \leq \sup_j \|f_j(n)\|_X$. Alles bij elkaar volgt $\sup_n \|f(n)\|_X < \infty$ oftewel $\|f\| < \infty$, oftewel $f \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$.

iii. Herschrijf in (*) $\forall_{j,k>N} \sup_n$ als $\forall_{j>N} \forall_n \forall_{k>N}$ en neem de $\lim_k$. Dit geeft: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall_{j>N} \, \forall_n \{\|f_j(n) - f(n)\|_X\} < \varepsilon$. Maar dit is niets anders dan de uitspraak $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall_{j>N} \|f_j - f\| < \varepsilon$, oftewel $f_j \to f$ in $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$.

2. Deze opgave gaat over de volgende Banach-ruimtes:

   - $\ell_0(\mathbb{N})$, de functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die voldoen aan $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ (heet ook wel c_0);
   - $\ell^1(\mathbb{N})$, de functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die voldoen aan $\sum_n |f(n)| < \infty$;
   - $\ell^2(\mathbb{N})$, de functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die voldoen aan $\sum_n |f(n)|^2 < \infty$;
   - $\ell^\infty(\mathbb{N})$, de begrensde functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$;
   - $B_0(\ell^2(\mathbb{N}))$, de compacte operatoren op $\ell^2(\mathbb{N})$ (deze heet ook vaak $K(\ell^2(\mathbb{N}))$);
   - $B_1(\ell^2(\mathbb{N}))$, de trace-class operatoren op $\ell^2(\mathbb{N})$;
   - $B(\ell^2(\mathbb{N}))$, de begrensde operatoren op $\ell^2(\mathbb{N})$.

   We laten $(\mathbb{N})$ verder weg, zodat ℓ^p betekent $\ell^p(\mathbb{N})$, enzovoort, en schrijven H i.p.v. ℓ^2.

   (a) Geef in al deze 7 gevallen de gebruikelijke norm op de gegeven ruimte.

   - $\ell_0(\mathbb{N})$: $\|f\|_\infty = \sup_n\{|f(n)|\}$.
   - $\ell^1(\mathbb{N})$: $\|f\|_1 = \sum_n |f(n)|$.
   - $\ell^2(\mathbb{N})$: $\|f\|_2 = \sqrt{\sum_n |f(n)|^2}$.
   - $\ell^\infty(\mathbb{N})$: $\|f\|_\infty = \sup_n\{|f(n)|\}$.
   - $B_0(\ell^2(\mathbb{N}))$: $\|a\| = \sup\{\|a\psi\|, \psi \in H, \|\psi\| = 1\}$.
   - $B_1(\ell^2(\mathbb{N}))$: $\|a\|_1 = \sum_k \sqrt{\mu_k}$ met μ_k de eigenwaarden van a^*a (met multipliciteit).
   - $B(\ell^2(\mathbb{N}))$: $\|a\| = \sup\{\|a\psi\|, \psi \in H, \|\psi\| = 1\}$.

   (b) Het is duidelijk dat *als verzamelingen* geldt $\ell^1 \subset \ell^0 \subset \ell^\infty$. Laat zien dat de bijbehorende afbeeldingen $\ell^1 \hookrightarrow \ell^0$ en $\ell^0 \hookrightarrow \ell^\infty$ *tussen Banach-ruimten* continu zijn.

   $\ell^1 \hookrightarrow \ell^0$: er geldt $\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$, de inclusieafbeelding is dus begrensd en daarmee continu (Lemma 4.1(e) boek).
   $\ell^0 \hookrightarrow \ell^\infty$: deze ruimten hebben dezelfde norm, de inclusieafbeelding is dus een isometrie en dus begrensd en daarmee continu.

   (c) *Als verzamelingen* geldt $B_1(H) \subset B_0(H) \subset B(H)$. Laat zien dat de bijbehorende afbeeldingen $B_1(H) \hookrightarrow B_0(H)$ en $B_0(H) \hookrightarrow B(H)$ *tussen Banach-ruimten* continu zijn.

   $B_1(H) \hookrightarrow B_0(H)$: er geldt $\|a\| \leq \|a\|_1$, zie syllabus (I.71) of (I.76). Zie dan vorige opgave.
   $B_0(H) \hookrightarrow B(H)$: deze ruimten hebben dezelfde norm, de inclusieafbeelding is dus een isometrie en dus begrensd en daarmee continu.

   (d) Laat zien dat er een *isometrische* (en dus injectieve) afbeelding $\ell^1 \hookrightarrow B_1(H)$ bestaat (i.e., geef de afbeelding en bewijs dat deze isometrisch is).

   Dit is de afbeelding $f \mapsto T_f$, de vermenigvuldigingsoperator $T_f : H \to H$ gegeven door $T_f\psi = f\psi$. Zie nu Definition I.14 in de syllabus. Nu is $a^*a = T_f^*T_f = T_{\overline{f}f} = T_{|f|^2}$. De eigenvectoren van $T_{|f|^2}$ zijn de functies e_m met $e_m(n) = \delta_{nm}$, voor alle $m \in \mathbb{N}$, met eigenwaarden $|f(m)|^2$; immers $(T_{|f|^2}e_m)(n) = |f|^2(n)e_m(n) = |f|^2(n)\delta_{nm} = |f|^2(m)e_m(n)$, zodat $T_{|f|^2}e_m = |f(m)|^2e_m$. De index k in Definition I.14 is dus m en $\mu_m = |f(m)|^2$, zodat $\sqrt{\mu_m} = |f(m)|$. Dan is $\|T_f\|_1 = \sum_m \sqrt{\mu_m} = \sum_m |f(m)| = \|f\|_1$.

   (e) Laat zien dat er een *isometrische* (*idem*) afbeelding $\ell^\infty \hookrightarrow B(H)$ bestaat (*idem*).

   Opnieuw $f \mapsto T_f$. Eerst $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$: uit definitie inproduct en dus definitie norm in ℓ^2 volgt direct $\|f\psi\|_2 \leq \|f\|_\infty\|\psi\|_2$, uit definitie T_f en definitie operator norm volgt dan $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$. Neem nu aan dat $\|f\|_\infty > 0$ (anders is $f = 0$ en $T_f = 0$, zodat de stelling klopt). Kies $0 < a < \|f\|_\infty$ en definieer de verzameling

   $$D_a = \{n \in \mathbb{N}, |f(n)| > a\}.$$

Dan is D_a niet leeg (want anders was $\|f\|_\infty \leq a$), en omdat f continu is, is D_a open. Kies een eindige deelverzameling E_a van D_a. Dan is de karakteristieke functie $\psi = \chi_{E_a}$ niet nul en er volgt direct dat $\|f\psi\|_2 \geq a\|\psi\|_2$. Daarmee $\|T_f\| \geq a$. Dit is waar voor alle $0 < a < \|f\|_\infty$ en samen met $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$ volgt $\|T_f\| = \|f\|_\infty$

(f) Geef de duale Banach-ruimte van ℓ_0 en geef ook van deze duale de duale Banach-ruimte.

$\ell_0^* \cong \ell^1$, zie Exercise 5.3 in het boek, en $f \in \ell^1$ definieert $f' : \ell_0 \to \mathbb{C}$ d.m.v. $f'(g) = \sum_n f(n)g(n)$.

$(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$, zie Theorem 5.5 in boek, met zelfde afb. als boven.

(g) Zelfde twee vragen over $B_0(H)$.

$B_0(H)^* \cong B_1(H)$, en $\rho \in B_1(H)$ definieert $\rho' : B_0(H) \to \mathbb{C}$ d.m.v. $\rho'(a) = \mathrm{Tr}\,(\rho a)$, zie syllabus Theorem I.17.
$B_1(H)^* \cong B(H)$, en $a \in B(H)$ definieert $a' : B_1(H) \to \mathbb{C}$ d.m.v. $a'(\rho) = \mathrm{Tr}\,(\rho a)$, zie syllabus Theorem I.17.

Normering: alle deelopgaven leveren 1 punt op.