Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen — Januari 2010.

- Vul op elk blad uw naam in. Vul op de eerste bladzijde ook uw studierichting en e-mail adres in.
- De weging van de opgaven staat in de kantlijn vermeld. (In totaal 10 punten.)

---

1. Laat $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu, en $\sigma(t) = \int_0^t a(s)\,ds$. Geef een algemene formule, met afleiding, voor de oplossingen van de differentiaalvergelijking 1 pt.

$$u'(t) = a(t)\,u(t) + b(t)$$

met beginwaarde $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$. (Neem eerst $b = 0$.)

2. We bekijken de scalaire differentiaalvergelijking $u'(t) = f(t, u(t))$ met 1 pt.

$$f(t,v) = -t\,\mathrm{sgn}(v)\,\sqrt{|v|} = \begin{cases} -t\sqrt{v} & \text{voor } v \geq 0\,, \\ t\sqrt{-v} & \text{voor } v < 0\,. \end{cases}$$

Bepaal expliciete uitdrukkingen voor de oplossingen en maak een schets van de grafiek van de oplossingen. Op welke intervallen bestaan deze oplossingen? Zijn de oplossingen uniek?

3. Beschouw de lineaire differentiaalvergelijking $u'(t) = Au(t)$ in $\mathbb{R}^2$ met 2 pt.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -\alpha \\ -2\alpha & 2\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal voor $\alpha = 1$ en $\alpha = -1$ de oplossingen en bespreek stabiliteit van de stationaire oplossing $u_* = 0$. Maak een schets van de banen in het fasevlak. (Als hulp en ter controle rekenwerk: $\lambda = -1$ is een eigenwaarde van de matrix. Het is niet nodig e^{tA} expliciet te berekenen; denk aan transformatie!)

4. Bekijk het systeem van differentiaalvergelijkingen 2 pt.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\big(2 - x(t) - 2y(t)\big)\,, \\ y'(t) = y(t)\big(2 - 2x(t) - y(t)\big)\,. \end{cases}$$

a) Toon aan dat als $x(0), y(0) > 0$, dan is $x(t), y(t) > 0$ voor alle $t > 0$. (Gebruik hiervoor een stelling over existentie en eenduidigheid; de stelling hoeft niet bewezen te worden.)
b) Bepaal de stationaire punten en, indien mogelijk via linearizering, de stabiliteits eigenschappen van deze punten.

5. Laat $\alpha, \beta \geq 0$ en $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. 2 pt.
a) Neem aan dat $\mu : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ is continu en $\mu(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \mu(s)\,ds$ voor alle $t \geq 0$. Laat zien dat dan $\mu(t) \leq \alpha e^{\beta t}$ voor $t \geq 0$. (Hint: beschouw $\varphi(t) = \int_0^t \mu(s)\,ds$.)
b) Neem aan dat $u, \tilde{u}$ oplossingen zijn op $[0, T]$ van de differentiaalvergelijking $u'(t) = f(t, u(t))$ met beginwaarden $u(0) = u_0$ en $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$. Toon aan: er is een $\gamma > 0$ zodat $|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \gamma |u_0 - \tilde{u}_0|$ voor $t \in [0, T]$.

6. Bekijk, voor gegeven $q \in \mathbb{R}$, het randwaarde probleem 2 pt.

$$w''(s) - q\,w'(s) = \lambda\,w(s)\,, \quad w(0) = w'(1) = 0\,.$$

Bepaal de eigenwaarden λ zodat dit probleem een oplossing $w \neq 0$ heeft.