Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen — Januari 2011.

- Vul op elk blad uw naam in. Vul op de eerste bladzijde ook uw studierichting en e-mail adres in.
- De weging van de opgaven staat in de kantlijn vermeld. (In totaal 10 punten.)
- Gegeven: Als $f : [0,T]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continu is, en $\|f(t,v)-f(t,\tilde{v}\| \le L\|v-\tilde{v}\|$ voor alle $t \in [0,T]$ en alle $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^m$, dan heeft het beginwaarde probleem $u'(t) = f(t, u(t))$, $u(0) = u_0$ een unieke olossing op $[0,T]$.

---

1. Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking 1 pt.

$$u'(t) = \frac{2t}{u(t)-1}\,.$$

Op welke intervallen $\mathcal{I}$ bestaan de oplossingen ? Schets de oplossingen, en bespreek eenduidigheid van de oplossingen.

2. Laat $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. De oplossingen van de differentiaalvergelijking $u'(t) = Au(t)$ zijn gegeven door $u(t) = e^{tA}u(0)$. Geef de algemene vorm, met afleiding, van de oplossingen van het inhomogene probleem 1 pt.

$$u'(t) = Au(t) + g(t)\,, \qquad u(0) = u_0\,.$$

3. Bekijk het beginwaarde probleem $u'(t) = f(u(t))$, $u(0) = u_0$, met gegeven $u_0 \in \mathbb{R}$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Voor willekeurige $R > 0$ is de functie $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd als 2 pt.

$$\bar{f}(v) = \begin{cases} f(u_0 - R) & \text{voor} \quad v < u_0 - R\,, \\ f(v) & \text{voor} \quad u_0 - R \le v \le u_0 + R\,, \\ f(u_0 + R) & \text{voor} \quad v > u_0 + R\,. \end{cases}$$

a) Toon aan dat de functie $\bar{f}$ aan een globale Lipschitz voorwaarde voldoet: er is een $L > 0$ zodanig dat $|\bar{f}(v) - \bar{f}(\tilde{v})| \le L|v - \tilde{v}|$ voor alle $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}$.
b) Laat zien: het beginwaarde probleem heeft een oplossing op een interval $[0, \bar{T}]$ met $\bar{T} > 0$. Is deze oplossing uniek ?

4. Neem aan dat $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ is continu differentieerbaar, u is een oplossing van de differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$, en $u(T) = u(0)$ voor zekere $T > 0$. Bewijs dat u een periodieke oplossing is. 1 pt.

5. Bekijk de differentiaalvergelijking 2 pt.

$$x''(t) + 2\,\alpha\, x'(t) + \beta\, x(t) = 0\,,$$

met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Schrijf deze tweede-orde vergelijking als een stelsel van twee eerste-orde vergelijkingen. De oorsprong $u_* = 0$ is een stationair punt. Voor welke waarden van α, β is dit stationaire punt stabiel ?

b) Geef voor de gevallen $\alpha^2 > \beta$, $\alpha^2 = \beta$ en $\alpha^2 < \beta$ de algemene oplossing van de differentiaalvegelijking. Geef een schets van de faseportretten.

6. Beschouw het randwaarde probleem $w''(t) = pw'(t) + qw(t)$, $w(0) = \xi$, $w(1) = \eta$, met $p, q \in \mathbb{R}$ constant. Voor welke waarden van p, q heeft dit randwaarde probleem een unieke oplossing voor willekeurige $\xi, \eta \in \mathbb{R}$? 1 pt.

7. Bekijk het stelsel differentiaalvergelijkingen 2 pt.

$$\begin{cases} x'(t) = y(t)\,, \\ y'(t) = g(x(t)) - \gamma\, y(t)\,, \end{cases}$$

met $\gamma \geq 0$ en $g(x) = x^2 - x$.

a) Bepaal de stationaire punten en (indien mogelijk) hun stabiliteit.

b) Laat $\gamma = 0$ en $E(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x^3$. Toon aan dat de banen van oplossingen gegeven worden door algebraische vergelijkingen van de vorm $E(x, y) = c$ met integratie constante $c \in \mathbb{R}$. Niveaulijnen van de functie E zijn getekend in onderstaande figuur. Voor welke waarden van c hebben we een periodieke oplossing ?

c) Bepaal het gedrag (met orientatie) van de oplossingen in de buurt van de oorsprong voor $\gamma > 0$.

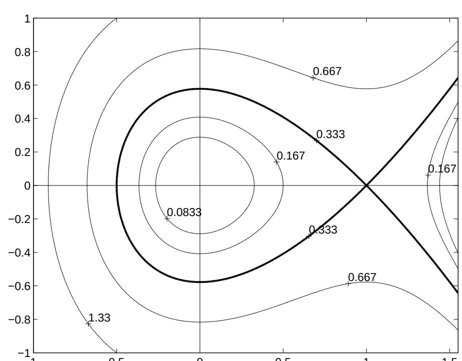

Fig: Niveaulijnen $E(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x^3 = c$ voor $c = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$.