Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen — Januari 2012.

- Vul op elk blad uw naam in. Vul op de eerste bladzijde ook uw studierichting en e-mail adres in.
- De weging van de opgaven staat in de kantlijn vermeld. (In totaal 10 punten.)

---

1. Laat $\lambda \in \mathbb{R}$ en stel $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continu. Geef een algemene formule, met afleiding, voor de oplossingen van de differentiaalvergelijking 1 pt.

$$u'(t) = \lambda u(t) + g(t)$$

met beginwaarde $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$.

2. Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking $\frac{3}{2}$ pt.

$$u'(t) = \sqrt{|u(t)|}\,.$$

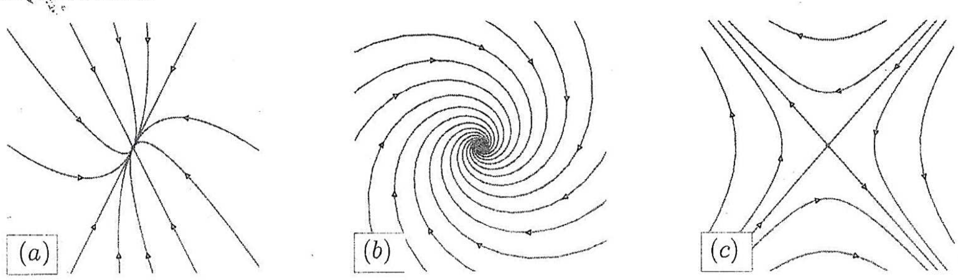
Op welke intervallen $\mathcal{I}$ bestaan de oplossingen? Schets de oplossingen. Is het mogelijk dat er nog andere oplossingen zijn?

3. Stel $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ is diagonaliseerbaar, $A\underline{v}_j = \lambda_j \underline{v}_j$ met eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en lineair onafhankelijke eigenvectoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$. Toon aan dat de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $u' = Au$ gegeven wordt door $u(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{t\lambda_j} \underline{v}_j$ met coefficienten c_j. Zijn deze coefficienten eenduidig bepaald door een beginwaarde $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m$? 1 pt.

4. Beschouw de differentiaalvergelijkingen $u' = Au$, met de volgende drie matrices $A = P, Q, R$: $\frac{3}{2}$ pt.

$$P = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/4 \\ 1 & -3/2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -3/4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1/8 & -3/2 \\ -2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

en de onderstaande fase plaatjes. Welk plaatje hoort bij welke matrix? Motiveer het antwoord.



5. Bekijk, voor gegeven $\alpha, \beta \geq 0$, de differentiaalvergelijking 2 pt.

$$w'' + 2\,\alpha\, w' + \beta\, w = 0\,.$$

a) Geef voor de gevallen $\alpha^2 > \beta$, $\alpha^2 = \beta$ en $\alpha^2 < \beta$ de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking. Maak duidelijk hoe u aan deze oplossingen komt.
b) Voor welke waarden van $\lambda \in \mathbb{R}$ heeft het randwaarde probleem $w'' + \beta w = \lambda w$, $w(0) = w(1) = 0$ een oplossing $w \neq 0$?

6. Stel $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is continu differentieerbaar. Bekijk het stelsel differentiaalvergelijkingen 2 pt.

$$x' = \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)\,, \qquad y' = -\frac{\partial E}{\partial x}(x,y)\,.$$

a) Toon aan dat voor elke oplossing $x(t), y(t)$ van de differentiaalvergelijking geldt dat $E(x(t), y(t))$ constant is in t.
b) Laat $E(x,y) = y^2 + x^4$. Bepaal de stationaire punten, en de stabiliteit van deze punten. Zijn er periodieke oplossingen? Schets de banen in het fase vlak met orientatie (richting waarin de banen doorlopen worden).

7. Laat $f, \tilde{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ met $\|f(v) - f(\tilde{v})\| \leq L\|v - \tilde{v}\|$ en $\|f(v) - \tilde{f}(v)\| \leq M$ voor alle $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^m$. Verder zijn u en $\tilde{u}$ oplossingen van 1 pt.

$$u'(t) = f(u(t))\,, \qquad u(0) = u_0\,,$$
$$\tilde{u}'(t) = \tilde{f}(\tilde{u}(t))\,, \qquad \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0\,.$$

Toon aan dat

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq e^{Lt}\|u_0 - \tilde{u}_0\| + \tfrac{1}{L}(e^{Lt} - 1)M \qquad (\text{voor } t \geq 0)\,.$$

Hiervoor mag gebruik gemaakt worden van het volgende lemma (Gronwall): als $\mu(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \mu(s)\,ds$ $(0 \leq t \leq T)$, met μ continu, α continu differentieerbaar en $\beta \geq 0$ constant, dan is $\mu(t) \leq e^{\beta t}\alpha(0) + \int_0^t e^{\beta(t-s)}\alpha'(s)\,ds$ $(0 \leq t \leq T)$.