

## Getallen

toets 2: 21 november 2008, 8:45–10:30

*Dit is de tweede van de vier toetsen van Getallen. Laat  $N$  het totale aantal punten zijn dat voor de toetsen wordt behaald (het maximale aantal is 110). Het eindcijfer van Getallen wordt bepaald op het mondelinge tentamen en zal niet lager zijn dan  $\frac{N-10}{10}$ , afgerond op halve punten. Met deze toets kunnen 28 punten worden behaald.*

1. De relatie  $\sim$  in  $\mathbb{Z}$  is gedefinieerd door

$$a \sim b \iff 5 \mid a^2 - b^2 \quad (\text{voor alle } a, b \in \mathbb{Z}).$$

- (i) **(4 punten)**  
Bewijs dat  $\sim$  een equivalentierelatie is.
- (ii) **(3 punten)**  
Bepaal  $[1]_{\sim}$ , de equivalentieklasse van 1.
- (iii) **(2 punten)**  
Hoeveel equivalentieklassen zijn er? Bepaal een representantensysteem.
2. (i) **(4 punten)**  
Bepaal alle  $x, y \in \mathbb{Z}$  waarvoor  $68x - 25y = 1$ .
- (ii) **(3 punten)**  
Bepaal alle  $x, y \in \mathbb{Z}$  waarvoor  $68x - 25y = 2$ .
3. **(4 punten)**  
De vergelijking  $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$  heeft in  $\mathbb{Q}$  een oplossing:  $x = 1$  voldoet.  
Bepaal alle oplossingen in  $\mathbb{Q}$ .
4. De rij  $a_0, a_1, a_2, \dots$  in  $\mathbb{N}$  is gedefinieerd door

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 9a_n + 7 \end{cases} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (i) **(4 punten)**  
Bepaal de 3-tallige schrijfwijze van  $a_n$ .
- (ii) **(4 punten)**  
Wat is de 27-tallige schrijfwijze van  $a_{1000}$ ?