

**Propedeuse Wiskunde 2009–2010, WP006B**

**Getallen**

**toets 1: 12 oktober 2009, 15:45–17:30**

*Dit is de eerste van de vier toetsen van Getallen. Laat  $N$  het totale aantal punten zijn dat voor de toetsen wordt behaald (het maximale aantal is 110). Het eindcijfer van Getallen wordt bepaald op het mondelinge tentamen en zal niet lager zijn dan  $\frac{N-10}{10}$ , afgerond op halve punten. Met deze toets kunnen 27 punten worden behaald.*

*Vermeld op de eerste bladzijde rechtsboven:*

**naam**  
**studentnummer**  
**opleiding**  
**groep (A, B, C of D, of anders naam assistent)**

*en verder op ieder blad je naam.*

*Geef bij vragen als ‘Hoeveel ...?’, ‘Wat is ...?’ en ‘Is ...?’ steeds een toelichting. Antwoorden als ‘37’ en ‘nee’ zijn niet voldoende.*

1. De transformatie  $f$  van  $\mathbb{N}_{10}$  is gedefinieerd door

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 9, \quad f(4) = 6, \\ f(5) = 5, \quad f(6) = 6, \quad f(7) = 9, \quad f(8) = 4, \quad f(9) = 1.$$

(i) **(3 punten)**

Bepaal  $f_*(\mathbb{N}_{10})$  en  $(f^2)_*(\mathbb{N}_{10})$ .

(ii) **(3 punten)**

Toon aan dat  $f^n = f^2$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$  met  $n \geq 2$ .

2. We definiëren de natuurlijke getallen  $n?$  voor  $n \in \mathbb{N}$  door:

$$\begin{cases} 0? = 1, \\ (n+1)? = (2n+1) \cdot n? \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(i) **(2 punten)**

Bereken  $5?$ .

(ii) **(4 punten)**

Bewijs dat  $2^n \cdot n! \cdot (n+1)? = (2n+1)!$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Z.O.Z.**

3. (i) **(2 punten)**

Hoeveel deelverzamelingen  $V$  van  $\underline{10}$  zijn er waarvoor  $V \cap \underline{5} = \emptyset$ ?

(ii) **(2 punten)**

Hoeveel deelverzamelingen  $W$  van  $\underline{10}$  zijn er waarvoor  $W \cap \underline{5} \neq \emptyset$ ?

We beschouwen de graaf met  $\mathcal{P}(\underline{10})$  als hoekpuntenverzameling. De ribben zijn de tweetallen  $\{U, V\}$  met  $U, V \in \mathcal{P}(\underline{10})$ ,  $U \neq V$  en  $U \cap V \neq \emptyset$ . De graad van een hoekpunt  $W$  is gedefinieerd als het aantal ribben van de vorm  $\{W, V\}$ .

(iii) **(2 punten)**

Wat is de graad van het hoekpunt  $\emptyset$ ? En van het hoekpunt  $\underline{10}$ ?

(iv) **(2 punten)**

Wat is de graad van het hoekpunt  $\{1, 4, 7, 10\}$ ?

4. De transformatie  $g$  van  $\mathbb{N}^2$  is gedefinieerd door

$$g(a, b) = (2b + 1, 3a + 2) \quad (\text{voor alle } a, b \in \mathbb{N}).$$

(i) **(3 punten)**

Is  $g$  injectief? Is  $g$  surjectief?

(ii) **(4 punten)**

Toon aan dat  $g^{2n}(0, 0) = (6^n - 1, 6^n - 1)$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .