Propedeuse Wiskunde 2009–2010, WP006B

Getallen

toets 2: 23 november 2009, 15:45–17:30

Dit is de tweede van de vier toetsen van Getallen. Laat N het totale aantal punten zijn dat voor de toetsen wordt behaald (het maximale aantal is 110). Het eindcijfer van Getallen wordt bepaald op het mondelinge tentamen en zal niet lager zijn dan $\frac{N-10}{10}$, afgerond op halve punten. Met deze toets kunnen 28 punten worden behaald.

Vermeld op de eerste bladzijde rechtsboven:

naam
naam werkcollegeassistent

en verder op ieder blad je naam.

1. De relatie $\equiv$ in $\mathbb{Q}$ is gedefinieerd door

$$r \equiv s \iff r - s \in \mathbb{Z} \qquad\qquad (\text{voor alle } r, s \in \mathbb{Q}).$$

(i) (**2 punten**)
Toon aan dat $\equiv$ een equivalentierelatie is.

(ii) (**2 punten**)
Beschrijf de equivalentieklasse $[\frac{1}{2}]_\equiv$.

(iii) (**2 punten**)
Geef een representantensysteem van de partitie $\mathbb{Q}/\equiv$.

(iv) (**2 punten**)
Laat zien dat onder de afbeelding $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\equiv, r \mapsto [2r]_\equiv$ elementen hetzelfde beeld hebben als ze tot dezelfde equivalentieklasse behoren.

2. (i) (**2 punten**)
Bepaal alle $x, y \in \mathbb{Z}$ waarvoor geldt $123x + 321y = 0$.

(ii) (**3 punten**)
Bepaal alle $x, y \in \mathbb{Z}$ waarvoor geldt $123x + 321y = 444$.

(iii) (**2 punten**)
Bepaal alle $x, y \in \mathbb{Z}$ waarvoor geldt $123x + 321y = 4444$.

z.o.z.

3. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is $a_n \in \mathbb{N}$ gegeven door z'n 4-tallige schrijfwijze:

$$a_n = [\overbrace{1, 2, 1, 1, 2, 1, \ldots, 1, 2, 1}^{3n}]_4.$$

(Het rijtje van $3n$ getallen is opgebouwd uit n rijtjes $1, 2, 1$; voor $n = 0$ is het rijtje leeg: $[\,]_4$ is het getal 0.)

(i) (**3 punten**)
Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n = \frac{25}{63} \cdot 64^n - \frac{25}{63}$.

(ii) (**3 punten**)
Bepaal voor $n \in \mathbb{N}$ de 4-tallige schrijfwijze van $4^{3n+1} - 1 - a_n$.

4. Een rechthoek heeft zijden van lengte x en y met $x, y \in \mathbb{N}^*$. De omtrek en de oppervlakte van de rechthoek zijn aan elkaar gelijk.

(i) (**2 punten**)
Laat zien dat x even of y even is.

(ii) (**3 punten**)
Stel $y = 2z$ met $z \in \mathbb{N}^*$. Toon aan dat $z - 1 \mid 2$.

(iii) (**2 punten**)
Er zijn (op congruentie na) precies twee rechthoeken met zijden van gehele lengte en met de omtrek gelijk aan de oppervlakte. Ga dat na.