Propedeuse Wiskunde 2012–2013, WP006B

Getallen

Tentamen: donderdag 24 januari, 8:30-11:30

Vermeld op de eerste bladzijde rechtsboven:
naam, studentnummer, opleiding, naam assistent
en verder op ieder blad je naam.

Geef bij vragen als Hoeveel . . . ?, Wat is . . . ? en Is . . . ? steeds een toelichting. Antwoorden als 37 en nee zijn niet voldoende.

Succes!

1. Bewijs de volgende uitspraken met inductie.
   (i) (4 punten) Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $0 + 2 + \ldots + 2n = n(n+1)$.
   (ii) (4 punten) Laten σ en τ permutaties zijn van een verzameling X. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $(\sigma\tau\sigma^{-1})^n = \sigma\tau^n\sigma^{-1}$.

2. (4 punten) Laat $g \in \mathbb{N}$ met $g \geq 2$. We bekijken het getal r dat in de g-tallige notatie wordt gegeven voor

$$r = 0,\overline{c_1c_2\ldots c_k}$$

   met $c_1, \ldots, c_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ niet alle 0.
   Laat zien dat er $a, b \in \mathbb{N}^*$ bestaan met $r = \frac{a}{b}$ en $ggd(g, b) = 1$.

3. (i) (3 punten) Geef een voorbeeld van een rij (a_n) in $\mathbb{Q}$ waarvoor geldt: (a_n) convergeert en de rij van entiers $(\lfloor a_n \rfloor)$ convergeert niet.
   (ii) (4 punten) Laat (a_n) een Cauchyrij in $\mathbb{Q}$ zijn. Toon aan dat er een $m \in \mathbb{Z}$ en een $N \in \mathbb{N}$ zijn zodat $m - 1 < a_n < m + 1$ voor alle $n \geq N$.
   (iii) (4 punten) Laat (a_n) een Cauchyrij in $\mathbb{Q}$ zijn waarvoor de rij $(\lfloor a_n \rfloor)$ niet convergeert. Bewijs dat (a_n) convergeert naar een geheel getal.

4. Geef bij de volgende onderdelen aan of er een geheel getal x bestaat met de gevraagde eigenschappen. Zo ja, vind een dergelijke x. Zo nee, leg uit waarom een dergelijke x niet bestaat.
   (i) (4 punten) $x \equiv 4 \pmod{11}$ en $x \equiv 3 \pmod{17}$.
   (ii) (4 punten) $x \equiv 3 \pmod{15}$ en $x \equiv 1 \pmod{18}$.
   (iii) (3 punten) $x^2 \equiv -1 \pmod{103}$.

Z.O.Z.

5. (i) (4 punten) Laat zien dat de vergelijking $x^4 = 2$ geen oplossingen heeft in $\mathbb{Q}$. (Als je wilt gebruiken dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is, dan moet je hier een bewijs van geven).

   (ii) (3 punten) Geef alle oplossingen van de vergelijking $x^4 = 2$ in $\mathbb{C}$.

6. Laten A en B verzamelingen zijn en $f\colon A \to B$ een functie. Geef voor de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   (i) (4 punten) Voor alle $U \subseteq A$ geldt $U \subseteq f^*(f_*(U))$.

   (ii) (4 punten) Voor alle $U \subseteq A$ geldt $f^*(f_*(U)) \subseteq U$.