Tentamen Inleiding Fouriertheorie, Voorjaar 2012

12.04.2012

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve Stein/Shakarchi: Fourier analysis (en de twee analyse boeken van T. Tao).
- Als je stellingen uit Stein/Shakarchi gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.

Opgave 1 Zij $p \in (0, \pi)$. De functie f zij op het interval $[0, \pi]$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xh}{p} & \text{als } 0 \le x \le p \\ \frac{h(\pi - x)}{\pi - p} & \text{als } p \le x \le \pi \end{cases}$$

(i) Maak en (primitief) schets.
(ii) Bepaal $A_m, m \in \mathbb{N}$, zodanig dat

$$\forall x \in [0, \pi] : \quad f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx.$$

(iii) Bewijs dat de reeks in (ii) naar f convergeert.

Opgave 2 Voor $0 < \alpha < 1$ definieer

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}. \tag{1}$$

(i) Bewijs dat (1) voor elk $x \in \mathbb{R}$ convergeert. Hint: Summation by parts.

(ii) Pretendeer dat je sommatie en integratie mag verwisselen en bereken de Fouriercoefficienten $c_n(f_\alpha)$.

(iii) In het geval $0 < \alpha \le 1/2$, gebruik de formule van Parseval om te concluderen dat er geen Riemann integreerbare functie f is met $c_n(f) = c_n(f_\alpha)\ \forall n$.
(Dus (1) is niet de Fourierreeks van een Riemann integreerbare functie.)

(iv) BONUS (PROBEER DIT PAS ALS JE MET DE REST KLAAR BENT!):
Bewijs de conclusie van (iii) voor $1/2 < \alpha < 1$. Hint: Zie Stein/Shakarchi, blz. 95.

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 Zij $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ periodiek met periode T en zij $\int_0^T f(t)dt = 0$. Bewijs

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \;\leq\; \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt.$$

Hint: Misschien eerst voor $T = 2\pi$ en dan algemeen, maar incl. bewijs.

Opgave 4 Zij $f_0, f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gegeven en zij

$$\Omega = \mathbb{R} \times (0,1) = \{(x,y) \mid -\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1\}.$$

We zoeken een functie $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ die aan de volgende eisen voldoet:

1. $u \in C(\overline{\Omega})$,
2. $u \in C^2(\Omega)$ en $\Delta u = 0$ op Ω (met $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$).
3. $u(x,y) \to 0$ als $x \to \pm\infty$,
4. $u(x,0) = f_0(x)$ en $u(x,1) = f_1(x)$.

(a) Laat zien dat $\widehat{u}(\xi, y)$ (de Fourier getransformeerde van u t.o.v. x) door

$$\widehat{u}(\xi, y) = \frac{\sinh(2\pi(1-y)\xi)}{\sinh(2\pi\xi)}\, \widehat{f_0}(\xi) + \frac{\sinh(2\pi y\xi)}{\sinh(2\pi\xi)}\, \widehat{f_1}(\xi)$$

gegeven is.

(b) Laat zien dat

$$u(x,y) = \frac{\sin \pi y}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(x-t)}{\cosh \pi t - \cos \pi y}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x-t)}{\cosh \pi t + \cos \pi y}\, dt \right).$$

Je mag zonder bewijs gebruiken dat de Fourier getransformeerde van

$$\phi(x) = \frac{\sin \pi a}{2} \cdot \frac{1}{\cosh \pi x + \cos \pi a}$$

door

$$\widehat{\phi}(\xi) = \frac{\sinh 2\pi a\xi}{\sinh 2\pi\xi}$$

gegeven is.

Oplossingen

Oplossing 1 (i) (Er zijn twee opties: Of we bekijken f als periodieke functie op $[0,\pi]$ en zoeken een ontwikkeling in termen van functies $e^{2inx}, n \in \mathbb{Z}$, of we zetten f naar $[-\pi, 0]$ voort en zoeken ee ontwikkeling in termen van functies e^{inx}. Uiteindelijk maakt het natuurlijk niet uit, maar gezien de aangegeven reeks een ontwikkeling in $\sin nx$ is lijkt de twede optie natuurlijker.)

De functie f is op $[0,\pi]$ gegeven. Voor $x \in [-\pi, 0]$ defineren we $f(x) = -f(-x)$, dus we maken f een oneven functie. Voor een oneven functie zijn er geen cosinus termen en geen constante term in de (reelle) Fourier ontwikkeling, dus

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$$

met

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Dus

$$A_n = \frac{2h}{p\pi} \int_0^p x \sin(nx)\, dx + \frac{2h}{(\pi - p)\pi} \int_p^{\pi} (\pi - x) \sin(nx)\, dx.$$

Een primitive voor $\sin(nx)$ is natuurlijk $-\cos(nx)/n$, en partiële integratie levert

$$\begin{aligned} \int_a^b x \sin(nx) dx &= -\int_a^b \frac{-1}{n} \cos(nx) dx + [x \frac{-1}{n} \cos(nx)]_a^b \\ &= [\frac{1}{n^2} \sin(nx) + \frac{-x}{n} \cos(nx)]_a^b \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2h}{p\pi} \left[\frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{x}{n} \cos(nx) \right]_0^p + \frac{2h}{(\pi - p)\pi} \left\{ \pi [\frac{-1}{n} \cos(nx)]_p^{\pi} - [\frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{x}{n} \cos(nx)]_p^{\pi} \right\} \\ &= \frac{2h}{p\pi} \left(\frac{1}{n^2} \sin(np) - \frac{p}{n} \cos(np) \right) \\ &+ \frac{2h}{(\pi - p)\pi} \left\{ \frac{-\pi}{n} (\cos(n\pi) - \cos(np)) + \frac{1}{n^2} \sin(np) + \frac{\pi}{n} \cos(n\pi) - \frac{p}{n} \cos(np)) \right\} \\ &= \frac{2h}{n^2 \pi} \sin(np) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\pi - p} \right) = \frac{2h \sin(np)}{n^2 p (\pi - p)} \end{aligned}$$

(ii) De functie f is continu en de Fouriercoëfficienten voldoen aan $|c_n(f)| \leq C/n^2$ voor $n \neq 0$. Dus $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$ en Corollary 2.3 op blz. 41 van Stein/Shakarchi implicieert dat de Fourierreeks overal naar $f(x)$ convergeert.

Oplossing 2 (i) Voor $x = 0$ geldt $\sin nx = 0$ voor alle n, dus de reeks convergeert. Nu

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}} = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{n^{\alpha}}.$$

Dat $\sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}/n^{\alpha}$ voor $x \neq 0$ convergeert was – in het geval $\alpha = 1$ – een huiswerk opgave, en het bewijs voor $0 < \alpha < 1$ is hetzelfde! We passen partiele sommatie

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_n B_N - a_1 B_0 - \sum_{n=1}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n,$$

waar $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, toe met $a_n = 1/n^\alpha$ en $b_n = e^{inx}$ (of e^{-inx}). Dan is

$$B_n = \sum_{k=1}^n e^{inx} = \frac{1 - e^{ix(n+1)}}{1 - e^{ix}} - 1,$$

en voor $x \neq 0$ is dit begrensd als functie van n, terwijl $a_n = 1/n^\alpha$ monotoon dalend is. Hieruit volgt convergentie van $\sum a_n b_n$ zoals in opgave 7 op blz. 60 van Stein/Shakarchi.

(iii) We rekenen

$$\begin{aligned} c_n(f_\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\alpha(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k^\alpha}\right) e^{-inx} dx \\ \text{“}=\text{''} &\ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sin kx}{k^\alpha} e^{-inx} dx \end{aligned}$$

Met $\sin kx = (e^{ikx} - e^{-ikx})/2i$ en de orthogonaliteit van de functies e^{inx} volgt meteen dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin kx}{k^\alpha} e^{-inx} dx = \frac{\delta_{k,n} - \delta_{-k,n}}{2i\, k^\alpha}.$$

Dus $c_0(f_\alpha) = 0$, en voor $n \neq 0$ geldt

$$c_n(f_\alpha) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\delta_{k,n} - \delta_{-k,n}}{2i\, k^\alpha} = \frac{\text{sign}(n)}{2i|n|^\alpha}.$$

(iii) Voor een Riemann integreerbare functie f geldt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

dus de som linkerhand is eindig. Maar met (ii) volgt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f_\alpha)|^2 = \sum_{n\neq 0} \left|\frac{\text{sign}(n)}{2i|n|^\alpha}\right|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

en voor $\alpha \leq 1/2$ is dit oneindig. Er is dus geen Riemann integreerbare functie f met $c_n(f) = c_n(f_\alpha)$. Dus: De reeks waardoor f_α gedefinieerd is is geen Fourierreeks.

Oplossing 3 Zij eerst $T = 2\pi$. De aanname $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ is equivalent aan $c_0(f) = 0$. We weten dat

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2,$$

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

Dus

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n(f)|^2,$$

en met $c_0(f) = 0$ en $|c_n(f)| \leq |nc_n(f)|$ voor $n \neq 0$ volgt

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n(f)|^2 = \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

zoals beweerd. De modificaties als $T \neq 2\pi$ stellen weinig voor.

Oplossing 4 (a) Gezien $f_0, f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mogen we hopen dat er een oplossing u is met $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. (Er is in feite een stelling die juist dit zegd.) Zij $\widehat{u}(\xi, y)$ de Fourier getransformeerde van u t.o.v. x. Dus

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi, y)\, e^{i2\pi x\xi}\, d\xi.$$

Gezien $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ mogen wij onder het integraalteken differentieren en krijgen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \widehat{u}(\xi, y)\, e^{i2\pi x\xi}\, d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-4\pi^2\xi^2\widehat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2 \widehat{u}(\xi, y)}{\partial y^2}\right) e^{i2\pi x\xi}\, d\xi. \end{aligned}$$

Dit moet nul zijn voor alle $(x, y) \in \Omega$. Voor vast y betekent dit dat de Fourier getransformeerde van de functie tussen haakjes identiek nul is, maar dit impliciert dat $(\cdots)$ zelf nul is. Dus

$$-4\pi^2\xi^2\widehat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2 \widehat{u}(\xi, y)}{\partial y^2} = 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R},\ y \in (0,1).$$

Voor vast y is dit een GDV voor de functie $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi, y)$. De algemene oplossing van $u''(x) = c^2u(x)$ is $u = Ae^{cx} + Be^{-cx}$. Dus

$$\widehat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{2\pi\xi y} + B(\xi)e^{-2\pi\xi y}, \tag{2}$$

waar $A(\xi), B(\xi)$ (op dit moment nog) willekeurige functies in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zijn. Hiermee volgt dat

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi, 0)\, e^{i2\pi x\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\xi) + B(\xi))\, e^{i2\pi x\xi}\, d\xi \tag{3}$$

$$u(x,1) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi, 1)\, e^{i2\pi x\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\xi)e^{2\pi\xi} + B(\xi)e^{-2\pi\xi})\, e^{i2\pi x\xi}\, d\xi \tag{4}$$

Onze randvoorwaarden $u(x,0) = f_0(x)$ en $u(x,1) = f_1(x)$ zijn equivalent aan

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_0(\xi)\, e^{i2\pi x\xi}\, d\xi \tag{5}$$

$$u(x,1) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_1(\xi)\, e^{i2\pi x\xi}\, d\xi \tag{6}$$

Als we (3) met (5) en (4) met (6) vergelijken zien we dat A, B aan

$$\begin{aligned} A(\xi) + B(\xi) &= \widehat{f}_0(\xi), \\ A(\xi)e^{2\pi\xi} + B(\xi)e^{-2\pi\xi} &= \widehat{f}_1(\xi) \end{aligned}$$

moeten voldoen, ofwel aan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi\xi} & e^{-2\pi\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{f}_0(\xi) \\ \widehat{f}_1(\xi) \end{pmatrix}.$$

We gebruiken

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

en krijgen

$$\begin{pmatrix} A(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-2\pi\xi} - e^{2\pi\xi}} \begin{pmatrix} e^{-2\pi\xi} & -1 \\ -e^{2\pi\xi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{f}_0(\xi) \\ \widehat{f}_1(\xi) \end{pmatrix}.$$

Dit is equivalent aan

$$A(\xi) = \frac{-e^{-2\pi\xi}\widehat{f}_0(\xi) + \widehat{f}_1(\xi)}{2\sinh 2\pi\xi}, \qquad B(\xi) = \frac{e^{2\pi\xi}\widehat{f}_0(\xi) - \widehat{f}_1(\xi)}{2\sinh 2\pi\xi}.$$

Door dit in (2) in te zetten krijgen we

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi, y) &= \frac{-e^{-2\pi\xi}\widehat{f}_0(\xi) + \widehat{f}_1(\xi)}{2\sinh 2\pi\xi} e^{2\pi\xi y} + \frac{e^{2\pi\xi}\widehat{f}_0(\xi) - \widehat{f}_1(\xi)}{2\sinh 2\pi\xi} e^{-2\pi\xi y} \\ &= \frac{\widehat{f}_0(\xi)(-e^{2\pi\xi(y-1)} + e^{2\pi\xi(1-y)}) + \widehat{f}_1(\xi)(e^{2\pi\xi y} - e^{-2\pi\xi y})}{2\sinh 2\pi\xi} \\ &= \frac{\widehat{f}_0(\xi)\sinh(2\pi\xi(1-y)) + \widehat{f}_1(\xi)\sinh(2\pi\xi y)}{\sinh 2\pi\xi} \end{aligned} \tag{7}$$

zoals beweerd.

(b) Met

$$\widehat{\phi}_a(\xi) = \frac{\sinh 2\pi a\xi}{\sinh 2\pi\xi}$$

kunnen we (7) op volgende manier herschrijven:

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}_0(\xi)\widehat{\phi_{1-y}}(\xi) + \widehat{f}_1(\xi)\widehat{\phi_y}(\xi).$$

We weten dat uit $\widehat{f}(\xi) = \widehat{a}(\xi)\widehat{b}(\xi)$ volgt $f = a * b$ waar

$$(a * b)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x-t)b(t)dt.$$

Als we nu de informatie gebruiken dat $\widehat{\phi_a}$ de Fourier getransformeerde van

$$\phi_a(x) = \frac{\sin \pi a}{2} \cdot \frac{1}{\cosh \pi x + \cos \pi a}$$

is, kunnen we concluderen dat

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (f_0 * \phi_{1-y})(x) + (f_1 * \phi_y)(x) \\ &= \frac{\sin \pi(1-y)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x-t) \frac{1}{\cosh \pi t + \cos \pi(1-y)} dt \\ &+ \frac{\sin \pi y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t) \frac{1}{\cosh \pi t + \cos \pi y} dt \end{aligned} \tag{8}$$

Als we nu nog gebruiken dat $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$ om te zien dat

$$\begin{aligned} \sin \pi(1-y) &= \sin(\pi - y\pi) = -\sin(-y\pi) = \sin(y\pi), \\ \cos \pi(1-y) &= \cos(\pi - y\pi) = -\cos(-y\pi) = -\cos(y\pi) \end{aligned}$$

zodat de integraal (8) met f_0 gelijk is aan

$$\frac{\sin \pi y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x-t) \frac{1}{\cosh \pi t - \cos \pi y} dt,$$

zijn we klaar.