

Schrijf boven elk vel je naam, studentnummer en studierichting (W, N of I).
Het is toegestaan een (grafische) rekenmachine te gebruiken.

Maak elke opgave op een apart vel!!

1. We beschouwen een rij onafhankelijke continue stochasten X_1, X_2, \dots , die allen verdeeld zijn volgens de dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^5} & \text{als } x \in [1, \infty) \\ 0 & \text{als } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

De onderdelen van deze opgave zijn allemaal los van elkaar te maken!

- (a) Wat is de kans dat van de 10 stochasten X_1, \dots, X_{10} er 2 of meer een waarde krijgen groter dan 2? Als het u niet lukt om $\mathbb{P}(X_1 > 2)$ te bepalen, neem dan aan dat $\mathbb{P}(X_1 > 2) = \frac{1}{8}$.
- (b) Definieer $Y = 1/X_1$. Geef de dichtheid van Y .
- (c) Definieer

$$S = \sum_{i=1}^{90} X_i.$$

Benader de kans dat S groter is dan 125, dus $\mathbb{P}(S \geq 125)$.

2. We gooien 5 dobbelstenen, tellen het maximale aantal gelijk gegooide stenen, en noemen dit X_1 . Dus als we $\{2, 3, 3, 5, 5\}$ gooien, dan geldt $X_1 = 2$, en als we $\{1, 3, 5, 5, 5\}$ gooien, geldt $X_1 = 3$. Merk op dat $X_1 \in \{1, \dots, 5\}$.
- (a) Geef de verdeling van X_1 (dus bereken $\mathbb{P}(X_1 = k)$, voor $k = 1, \dots, 5$). Hint: bereken $\mathbb{P}(X_1 = 2)$ als laatste!

Mocht u niet in staat zijn geweest om de verdeling van X_1 te bepalen, werk dan met de volgende (onjuiste!) kansen:

k	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X_1 = k)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Na de eerste worp, houden we de X_1 gelijk geworpen dobbelstenen vast (het kan voorkomen dat we meerdere mogelijkheden hebben om X_1 dobbelstenen te kiezen, met name als $X_1 = 1$), en gooien de andere $5 - X_1$ dobbelstenen opnieuw. Na deze tweede worp kijken we weer wat het maximale dobbelstenen met gelijk aantal ogen is, ook de dobbelstenen meetellend die we niet hebben geworpen, en stellen dit gelijk aan X_2 . Als voorbeeld: de eerste worp is $\{1, 3, 3, 5, 5\}$, dus $X_1 = 2$. We houden de twee 3-en vast (of de twee 5-en, dat mag je zelf weten). We gooien de overige drie dobbelstenen en krijgen $\{2, 3, 6\}$. De vijf dobbelstenen zijn nu dus $\{2, 3, 3, 3, 6\}$, dus $X_2 = 3$. Merk op dat $X_2 \geq X_1$, en als $X_1 = 5$, dan $X_2 = 5$.

- (b) Bepaal $\mathbb{P}(X_2 = 5)$. Dit is de kans op “Yahtzee” in hoogstens twee worpen (bij deze strategie)!
3. Luka spaart dinoplaatjes bij de supermarkt. Voor elke €2 krijgt hij een nieuw kaartje, willekeurig getrokken uit alle verschillende mogelijke dinokaartjes. Er zijn n dino's en de dino's zijn genummerd $1, \dots, n$. In deze opgave mag u gebruiken dat als $X \sim \text{Geo}(p)$, dan geldt

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ en } \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- (a) Stel Luka heeft al k verschillende dino's gespaard. Noem $T_{k,n}$ het aantal kaartjes dat hij nog extra moet krijgen totdat hij $k + 1$ verschillende dino's heeft gespaard. Wat is de verwachting van $T_{k,n}$?
- (b) Hoeveel geld moet Luka in verwachting uitgeven in de supermarkt om alle dinokaartjes te bemachtigen? Hint: gebruik (a).
- (c) Gebruik de ongelijkheid van Chebyshev om de kans te schatten dat als $n = 100$, Luka meer dan 800 kaartjes moet krijgen voordat hij alle dino's heeft. U mag gebruiken dat

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i} = 5.187 \text{ en } \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i^2} = 1.635.$$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0.1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0.2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0.3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0.4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0.5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0.6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0.7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0.8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0.9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1.0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1.1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1.2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1.3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1.4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1.5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1.6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1.7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1.8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1.9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2.0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2.1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2.2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2.3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2.4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2.5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2.6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2.7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2.8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
2.9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3.0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3.1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3.2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005
3.3	0005	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
3.4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002

Table 1: Right tail probabilities $1 - \Phi(a) = P(Z \geq a)$ of the $N(0, 1)$ -variabe Z .

Full solutions:

1a Er geldt

$$\mathbb{P}(X_1 > 2) = \int_2^{\infty} \frac{4}{x^5} dx = [-x^{-4}]_2^{\infty} = \frac{1}{16}.$$

Het aantal van de tien stochasten dat dus een waarde groter dan 2 krijgt, is $\text{Bin}(10, \frac{1}{16})$ verdeeld. De kans op 2 of meer is dus:

$$1 - \left(\frac{15}{16}\right)^{10} - \binom{10}{1} \left(\frac{1}{16}\right)^1 \left(\frac{15}{16}\right)^9 = 0.126.$$

In het geval een student (ten onrechte) $\mathbb{P}(X_1 > 2) = \frac{1}{8}$ heeft genomen, dan krijgen we

$$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{10} - \binom{10}{1} \left(\frac{1}{8}\right)^1 \left(\frac{7}{8}\right)^9 = 0.361.$$

1b Beschouw voor $t \in [0, 1]$ de verdelingsfunctie $F_Y(t)$:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1^{-1} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \geq t^{-1}) \\ &= \int_{t^{-1}}^{\infty} \frac{4}{x^5} dx \\ &= [-x^{-4}]_{t^{-1}}^{\infty} \\ &= t^4. \end{aligned}$$

De dichtheid f van Y is dus gegeven door

$$f(y) = \begin{cases} 4y^3 & \text{als } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{als } y \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

1c We gaan de centrale limiet stelling gebruiken, en hiertoe rekenen we eerst $\mathbb{E}(X_1)$ en $\text{Var}(X_1)$ uit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_1^{\infty} \frac{4}{x^4} dx \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Verder:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_1^{\infty} \frac{4}{x^3} dx \\ &= 2. \end{aligned}$$

Dus $\text{Var}(X_1) = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$. Dus $\mathbb{E}(S) = 120$ en $\text{Var}(S) = 20$. We weten dat de som van een groot aantal onafhankelijke en gelijk verdeelde stochasten ongeveer normaal verdeeld is. Dit betekent:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \geq 125) &\approx \mathbb{P}(N(120, 20) \geq 125) \\ &= \mathbb{P}\left(N(0, 1) \geq \frac{125 - 120}{\sqrt{20}}\right) \\ &= \mathbb{P}(N(0, 1) \geq 1.12) = 0.13.\end{aligned}$$

2a Er geldt:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^4} = \frac{120}{6^4} \text{ en } \mathbb{P}(X_1 = 5) = \frac{1}{6^4}.$$

Verder geldt dat het totale aantal worpen met $X_1 = 3$ gelijk is aan $6 \cdot \binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 5 = 1500$, dus $\mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{250}{6^4}$. Het totale aantal worpen met $X_1 = 4$ is gelijk aan $6 \cdot 5^2 = 150$. Dus $\mathbb{P}(X_1 = 4) = \frac{25}{6^4}$. Tot slot moet dus gelden dat

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1 - \frac{396}{6^4} = \frac{900}{6^4} = \frac{25}{36}.$$

Dit kunnen we ook als volgt inzien: het aantal worpen met 2 gelijken en drie verschillenden is gelijk aan $6 \cdot \binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3600$. Het aantal worpen met 2 keer 2 gelijken en 1 andere is $\binom{6}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \binom{4}{2} = 1800$. Dit geeft

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1800 + 3600}{6^5} = \frac{900}{6^4} = \frac{25}{36}.$$

2 Als $X_1 = 1$, dan geldt $\mathbb{P}(X_2 = 5 \mid X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 5) = 6^{-4}$. Als $X_1 = k \geq 2$, dan geldt

$$\mathbb{P}(X_2 = 5 \mid X_1 = k) = \frac{1}{6^{5-k}}.$$

Merk op dat deze formule ook waar is als $k = 1$! Dus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 5) &= \sum_{k=1}^5 \mathbb{P}(X_2 = 5 \mid X_1 = k) \mathbb{P}(X_1 = k) \\ &= \frac{1}{6^4} \cdot \frac{120}{6^4} + \frac{1}{6^3} \cdot \frac{900}{6^4} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{250}{6^4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{6^4} + \frac{1}{6^4} \\ &= \frac{20 + 900 + 1500 + 900 + 216}{6^7} \\ &= \frac{3536}{6^7} \\ &\approx 0.0126.\end{aligned}$$

3a De kans dat een volgend kaartje nieuw is, is gelijk aan $1 - k/n$. Als het kaartje niet nieuw is, is de situatie bij het volgende kaartje weer hetzelfde. Dus $T_{k,n}$ heeft een $\text{Geo}(1 - k/n)$ verdeling. Dit betekent dat

$$\mathbb{E}(T_{k,n}) = \frac{n}{n - k}.$$

3b Noem het totale aantal kaartjes totdat Luka elke dino heeft X . Dan geldt

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} T_{k,n}.$$

Dus

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Het verwachte betaalde bedrag is dus 2 keer zo groot.

3c Eerst moeten we de variantie van X bepalen:

$$\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}(T_{k,n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k/n}{(n-k)^2/n^2} = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} = n \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{k^2} = n^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Dit betekent dat

$$\mathbb{E}(X) = 518.7 \text{ en } \text{Var}(X) = 1.635 \cdot 10^4 - 518.7 = 1.583 \cdot 10^4.$$

Dus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 800) &= \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) > 800 - 518.7) \\ &\leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 800 - 518.7) \\ &\leq \frac{\text{Var}(X)}{281.3^2} \\ &= 0.2. \end{aligned}$$