Tentamen Kansrekening
Donderdag 28 oktober 2010, 14:00-17:00, collegezaal Lin03

- Het tentamen is open boek: boek en collegenota's mogen gebruikt worden. Een grafische rekenmachine mag ook gebruikt worden.
- Motiveer steeds uw antwoord, maar probeer de vragen kort en overzichtelijk te beantwoorden.
- Er zijn 4 vragen met in totaal 20 onderdelen. Voor elk onderdeel kunnen hoogstens 2 punten verdiend worden.
- Vergeet later niet de electronische enquête voor dit vak in te vullen !

---

1. Twee gloeilampen L_1, L_2 zijn in serie geschakeld. We noemen A de gebeurtenis dat L_1 niet functioneert en B de gebeurtenis dat L_2 niet functioneert. Gegeven is

$$\begin{aligned} P(A) &= p \\ P(B) &= \frac{p}{4} \\ P(A \cap B) &= p^3 \end{aligned}$$

Hierbij is p een getal dat voldoet aan $0 < p \leq 1/2$.

a) Bereken (als functie van p) de kans dat er geen stroom loopt (dit is de gebeurtenis $A \cup B$).

b) Bereken (als functie van p) de kans dat beide lampen niet functioneren, gegeven dat er geen stroom loopt.

c) Voor welke waarde van p weet je zeker dat L_1 niet functioneert als gegeven is dat L_2 niet functioneert ?

d) Voor welke waarde(n) van p zijn de gebeurtenissen A en B onafhankelijk?

e) Iemand selecteert random één van beide lampen, en stelt vast dat de lamp stuk is. Wat is de kans dat de geselecteerde lamp L_2 is ?

2. Een stochast X heeft de volgende kansdichtheid

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) \text{ voor } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ elders} \end{cases} \tag{0.1}$$

a) Toon aan dat f_X wel degelijk een kansdichtheid is.

b) Bereken de verwachting $\mathbb{E}(X)$.

c) Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

d) Bereken de conditionele kans

$$P\left(X \leq \frac{1}{2} \middle| X \geq \frac{1}{4}\right)$$

e) Bereken de mediaan van X, i.e., het getal m dat voldoet aan

$$P(X \leq m) = P(X \geq m) = \frac{1}{2}$$

f) Bereken de verwachtingswaarde $\mathbb{E}(1/X)$ en ga na dat $\mathbb{E}(1/X) > 1/\mathbb{E}(X)$.

3. De levensduren van n gloeilampen (in jaren) worden gemodelleerd met stochasten $X_1, \ldots, X_n$, die onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met parameter $\mathbb{E}(X_i) = 1$.

   a) Toon aan dat de levensduur van de eerste lamp die stuk gaat, i.e., de stochast $Y_n = \min_{i=1}^n X_i$ exponentieel verdeeld is, en bepaal de parameter van deze exponentiële verdeling. Hint: de gebeurtenis $Y \geq x$ is identiek aan de gebeurtenis $\cap_{i=1}^n (X_i \geq x)$; gebruik dan onafhankelijkheid.

   b) Geef voor $n = 100$ met behulp van de Chebychev ongelijkheid een bovengrens voor de volgende kans:

   $$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i > 2\right)$$

   U mag hierbij gebruiken dat voor alle $i = 1, \ldots, n$, voor de variantie geldt: $Var(X_i) = 1$.

   c) Geef aan waarom voor $n = 100$ de stochast $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ benaderend normaal verdeeld is, en geef de verwachting en de variantie van deze benaderende normale verdeling.

   d) Bereken met behulp van de normale benadering uit vorig onderdeel benaderend de kans

   $$P\left(Z_n \geq \frac{6}{5}\right)$$

   e) We beschouwen nu de levensduur van de langst brandende lamp, i.e., de stochast $M_n = \max_{i=1}^n X_i$. Toon aan dat voor $x \geq 0$,

   $$P(M_n \leq \log(n) + x) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n$$

   Hint: $(M_n \leq x)$ is dezelfde gebeurtenis als $\cap_{i=1}^n (X_i \leq x)$.

f) Bereken, gebruik makend van vorig onderdeel, de limietverdeling

$$\lim_{n \to \infty} P(M_n - \log(n) \leq x)$$

4. Zijn de volgende uitspraken juist of fout. Argumenteer (bondig).

   a) Disjuncte gebeurtenissen zijn altijd onafhankelijk.

   b) De kans op een mutatie bij een gegeven bacterie is 10^{-9}. In een populatie van 10^{10} bacteriën is het aantal mutanten benaderend Poisson verdeeld met parameter 10.

   c) De duur dat een programma loopt is exponentieel verdeeld met verwachting 1 uur. Het programma loopt al 10 minuten. De verwachte tijd dat het nog zal lopen is dus 50 minuten.