Tentamen Kansrekening (NB004B)

- *Het is een* **open boek** *tentamen. Gebruik van een rekenmachine of andere hulpmiddelen is* **niet** *toegestaan.*
- *Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.*
- *Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Deel je tijd verstandig in. Schrijf leesbaar.*
- *Geef voldoende uitleg bij je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden niet goed gekeurd.*

Opgave 1 Laat X en Y discrete stochasten zijn die de waarden 0, 1 en 2 aan kunnen nemen. De volgende waarden van de gezamelijke kansdichtheidsfunctie f en marginale kansdichtheidsfuncties f_X en f_Y zijn gegeven:

$$f(0,0) = 9/72, \quad f(0,1) = 12/72, \quad f(1,1) = 9/72, \quad f(1,2) = 3/72, \quad f(2,0) = 10/72,$$
$$f_X(0) = 1/3, \quad f_Y(0) = 1/3, \quad f_Y(1) = 1/2.$$

(a) Bereken de ontbrekende waarden van de kansdichtheidsfuncties f, f_X en f_Y.

(b) Zijn X en Y onafhankelijk?

(c) Bereken $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$ en de voorwaardelijke kans $\mathbb{P}[X \geq 1 | Y \leq 1]$.

Opgave 2 De prins, uit het sprookje Assepoester, is op zoek naar het meisje waarmee hij heeft gedanst, Assepoester dus. Hij weet alleen dat het glazen muiltje dat op de trap van het paleis is gevonden haar past. Eerst gaat hij maar eens wat rekenen. In het koningrijk van zijn vader wonen n jonge meisjes in de juiste leeftijdscatagorie. Nadat de schoenenmakers hun archieven van de laatste decennia hebben geraadpleegd, is bepaald dat deze meisjes een kleine kans $p \in (0, 1)$ hebben dat het muiltje hun past, d.w.z., de $n-1$ meisjes die niet Assepoester zijn; het muiltje past Assepoester zeker. Je mag er bij deze opgave van uit gaan dat de n meisjes het land niet verlaten.

(a) Wat is de kans dat het muiltje meer dan één van de n meisjes past?

(b) Stel de prins komt aan bij een huis, waar één van de n meisjes woont. Het muiltje past haar. Wat is de kans dat het meisje Assepoester is.

(c) Nu gaat de prins één voor één alle n meisjes in het land af, tot hij een meisje treft wie het muiltje past. Bereken de kans dat zij Assepoester is.

Z.O.Z.

Opgave 3

(a) Stel X is uniform verdeeld op het interval $(0, 1)$, d.w.z., $X \sim$ UNIF(0,1), en $\theta > 0$. Toon aan dat $Y = -\theta \log(X)$ exponentieel verdeeld is met parameter θ.

(b) Stel nu dat $Y_1, Y_2, \ldots$ onafhankelijke exponentieel verdeelde stochasten zijn, elk met parameter θ. Definieer $W_n = \min\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Toon aan dat W_n ook exponentieel verdeeld is. Hint: $\mathbb{P}[W_n \geq w] = \mathbb{P}[Y_i \geq w, i = 1, \ldots, n]$.

(c) Leidt af uit het resultaat van onderdeel (b) dat het rijtje stochasten $W_1, W_2, \ldots$ stochastisch convergeert naar een constante.

Opgave 4

(a) Stel X is uniform verdeeld over het interval (a, b), d.w.z., $X \sim$ UNIF(a, b). Geef een uitdrukking voor $\mathbb{P}[c < X < d]$ in termen van a, b, c, d en de functies $\max, \min : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Hint: Let goed op alle gevallen die voor kunnen komen. Het is mogelijk met driemaal $\max$ of $\min$.

(b) Zij X een exponentieel verdeelde stochast met parameter θ, $X \sim$ EXP(θ). Bereken de moment genererende functie M_X van X en bepaal hiermee de momenten van X om 0, d.w.z., $\mathbb{E}(X^k)$ voor $k = 1, 2, \ldots$.

(c) Neem aan dat het gewicht van een willekeurige Nederlander een normale verdeling heeft met verwachting 70 kilo en variantie 100 kilo^2. Een lift bevat 4 personen. Bereken de kans dat de personen in de lift samen meer dan 300 kilo wegen.

Oplossing Opgave 1

(a) De waarden zijn af te lezen uit de volgende tabel:

$b\backslash a$	0	1	2	$\mathbb{P}[Y=b]$
0	$9/72$	$5/72$	$10/72$	$1/3$
1	$12/72$	$9/72$	$15/72$	$1/2$
2	$3/72$	$3/72$	$6/72$	$1/6$
$\mathbb{P}[X=a]$	$1/3$	$17/72$	$31/72$	1

(b) Nee, want $f_X(0)f_Y(0) = 1/9 \neq 1/8 = 9/72 = f(0,0)$.

(c) Er geldt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{2} x f_X(x) = \tfrac{17+62}{72} = \tfrac{79}{72}, \quad \mathbb{E}(Y) = \sum_{y=0}^{2} y f_Y(y) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{6} = \tfrac{5}{6},$$
$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x,y=0,1,2} xyf(x,y) = \sum_{x,y=1,2} xyf(x,y) = \tfrac{9+30+6+24}{72} = \tfrac{69}{72} = \tfrac{23}{24},$$
$$\mathbb{P}[X \geq 1 | Y \leq 1] = \tfrac{\mathbb{P}[X\geq 1 \text{ en } Y \leq 1]}{\mathbb{P}[Y\leq 1]} = \tfrac{\frac{5+10+9+15}{72}}{\frac{5}{6}} = \tfrac{39}{60} = \tfrac{13}{20}.$$

Oplossing Opgave 2

(a) Het muiltje past Assepoester zeker. Zij X het aantal van de overige $n-1$ meisjes dat het muiltje past. Dan $X \sim \text{BIN}(n-1, p)$. De gevraagde kans is dus $\mathbb{P}[X \geq 1]$. Deze berekenen we als volgt:

$$\mathbb{P}[X \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 0] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] = 1 - \binom{n-1}{0} p^0 (1-p)^{n-1} = 1 - (1-p)^{n-1}.$$

(b) Definieer de gebeurtenissen $A =$ "Het muiltje past het meisje" en $B =$ "Het meisje is Assepoester". M.b.v. de Formule van Bayes berekenen we de gevraagde kans:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{n}}{1 \cdot \frac{1}{n} + p \cdot \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{1 + (n-1)p}$$

(c) De gebeurtenis

$A =$ "Het eerste meisje bij wie het muiltje past is Assepoester"

is te schrijven als disjuncte vereniging van de n gebeurtenissen

$A_k =$ "Assepoester is het k-de meisje en het muiltje past de eerste $k-1$ meisjes niet",

voor $k = 1, \ldots, n$. De gevraagde kans is hiermee te berekenen als

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\text{Het } k\text{-de meisje is Assepoester})\mathbb{P}(\text{Het muiltje past de eerste } k-1 \text{ meisjes niet}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot (1-p)^{k-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \frac{1-(1-p)^n}{np}.
\end{aligned}$$

Oplossing Opgave 3

(a) Merk op (zie Opg. D, ond. (a)) dat $\mathbb{P}[X \leq x] = x$ voor elke x in $(0,1)$. Uit de definitie volgt dat Y alleen niet-negatieve waarden aanneemt. De cummulatieve distributiefunctie (CDF) van Y, voor $y > 0$, wordt gegeven door

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[-\theta \log X \leq y] = \mathbb{P}[\log X \geq -y/\theta] = \mathbb{P}[X \geq e^{-y/\theta}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[X \leq e^{-y/\theta}] = 1 - e^{-y/\theta}. \end{aligned}$$

De laatste identiteit volgt omdat $e^{-y/\theta} \in (0,1)$, vanwege $y, \theta > 0$. Dit is de CDF voor de exponentiele verdeling met parameter θ. Dus $Y \sim \text{EXP}(\theta)$.

(b) Merk op dat W_n alleen niet-negatieve waarden aanneemt. Zij F_{W_n} de CDF van W_n. Voor $w \leq 0$ geldt $F_{W_n}(w) = 0$. Voor $w > 0$ geldt

$$\begin{aligned} F_{W_n}(w) =& \mathbb{P}[\min_i Y_i \leq w] = 1 - \mathbb{P}[\min_i Y_i \geq w] = 1 - \mathbb{P}[Y_i \geq w,\ i = 1, \ldots, n] \\ &= 1 - \prod_i \mathbb{P}[Y_i \geq w] = 1 - \prod_i (1 - \mathbb{P}[Y_i \leq w]) = 1 - \prod_i (e^{-w/\theta}) = 1 - e^{-nw/\theta}. \end{aligned}$$

De laatste formule is de CDF van een exponentieel verdeelde stochast met parameter θ/n.

(c) We zien hieraan dat voor elke $w > 0$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(w) = \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-nw/\theta} = 1.$$

Voor $w < 0$ geldt $F_{W_n}(w) = 0$ voor elke n. Dus het rijtje stochasten $W_1, W_2, \ldots$ convergeert stochastische naar de constante 0.

Oplossing Opgave 4

(a) Dit is te schrijven als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[c < X < d] &= \frac{\min(\max(a,d), b) - \max(\min(b,c), a)}{b-a} \\ &= (\max(0, \min(b,d) - \max(a,c))/(b-a). \end{aligned}$$

(b) Er geldt voor $|t| < 1/\theta$ dat

$$\begin{aligned} M_X(t) =& \mathbb{E}(e^{Xt}) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{xt} e^{-x/\theta}\, dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{x(t-(1/\theta))}\, dx = \frac{1}{\theta} \left[\frac{e^{x(t-1/\theta)}}{t-(1/\theta)} \right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{1}{\theta} \left(0 - \frac{1}{t-(1/\theta)} \right) = \frac{1}{1-\theta t}. \end{aligned}$$

Deze functie is te schrijven, voor $|t| < 1/\theta$, als machtreeks

$$\frac{1}{1-\theta t} = \sum_{k=0}^\infty (\theta t)^k = \sum_{k=0}^\infty k! \theta^k \frac{t^k}{k!}.$$

De momenten om 0 komen overeen met de Taylor coëfficienten van de MGF, waaruit volgt dat $\mathbb{E}(X^k) = k!\theta^k$.

(c) Zij X het gewicht van de 4 personen. Dan $X \sim \mathrm{N}(280, 400)$. (Dit is waar, zie Example 6.4.7, blz. 214, maar je mag ook opmerken dat uit de centrale limietstelling volgt dat X bij benadering normaal verdeeld is met $\mu = 280$ en $\sigma^2 = 400$.) Schrijf Φ voor de CDF behorende bij de standaard normale verdeling $\mathrm{N}(0, 1)$. Dan

$$\mathbb{P}[X \geq 300] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 300] = 1 - \Phi((300 - 280)/20) = 1 - \Phi(1) \approx 0,1587.$$