Hertentamen Kansrekening (NB004B)

- *Het is een* **open boek** *tentamen. Gebruik van een rekenmachine of andere hulpmiddelen is* **niet** *toegestaan.*
- *Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.*
- *Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Deel je tijd verstandig in.*
- *Schrijf leesbaar. Geef voldoende uitleg bij je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden niet goed gekeurd.*

Opgave 1 Laat X en Y twee discrete stochasten zijn. We zeggen dat X en Y symmetrisch verdeeld zijn als ze dezelfde waarden aannemen en $\mathbb{P}[X = a,\ Y = b] = \mathbb{P}[X = b,\ Y = a]$ voor alle getallen $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Toon aan dat als X en Y symmetrisch verdeeld zijn, ze dezelfde kansverdeling hebben, dat wil zeggen, voor de marginale pdf's f_X van X en f_Y van Y geldt $f_X(a) = f_Y(a)$ voor elke $a \in \mathbb{R}$.

Stel nu dat X en Y symmetrisch verdeeld zijn, dat ze de waarden $1, 2, 3$ aannemen, en dat de volgende waarden van de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie f en de marginale kansdichtheidsfuncties f_X en f_Y gegeven zijn

$$f(1,1) = \frac{1}{9}, \quad f(1,2) = \frac{5}{108}, \quad f(2,2) = \frac{2}{9}, \quad f_Y(2) = \frac{1}{3}, \quad f_Y(3) = \frac{1}{2}.$$

(b) Bereken de overige waarden van de kansdichtheidsfuncties f, f_X en f_Y.

(c) Bereken $\mathbb{E}(X)$ en $\mathrm{Var}(X)$ en de voorwaardelijke kans $\mathbb{P}[X \text{ is oneven} \mid X \geq Y]$.

Opgave 2 Een vaas bevat 5 witte en 3 zwarte ballen. We gooien eerst met een eerlijke dobbelsteen en halen vervolgens in één keer precies zoveel ballen uit de vaas als de dobbelsteen aangeeft.

(a) Wat is de kans dat we alleen witte ballen trekken, gegeven dat we een drie hebben gegooid met de dobbelsteen?

(b) Wat is de kans dat we alleen maar witte ballen trekken?

(c) Wat is de kans dat we een 3 hebben gegooid, gegeven dat we alleen maar witte ballen hebben getrokken?
N.B. als je de kansen bij (a) en/of (b) nodig hebt en niet hebt kunnen berekenen, geef ze dan aan met p_a, respectievelijk p_b.

Z.O.Z.

Opgave 3 Gegeven is de functie

$$F(x) = e^{-e^{-x}} = \exp(-\exp(-x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(a) Toon aan dat F de cumulatieve dichtheidsfunctie (CDF) is van een continue stochast X en bepaal de bijbehorende kansdichtheidsfunctie (pdf) f_X.

De mediaan ('median' in het Engels) van X is het getal $x_1 \in \mathbb{R}$ waarvoor $\mathbb{P}[X \leq x_1] = \mathbb{P}[X \geq x_1]$, mits er een uniek getal x_1 in $\mathbb{R}$ bestaat met deze eigenschap; de modus ('mode' in het Engels) van X is het getal $x_2 \in \mathbb{R}$ waar f_X zijn unieke maximum aanneemt, mits f_X een uniek maximum heeft.

(b) Bereken de mediaan en modus van X.

(c) Wat is de kansverdeling van de stochast $Y = e^{-X} = \exp(-X)$?

Opgave 4

(a) Een gebeurtenis is nooit onafhankelijk van zijn complement. Is de uitspraak correct of niet? Geef een korte uitleg bij je antwoord.

(b) Als X exponentieel verdeeld is, dan is $2X$ dat ook. Is de uitspraak correct of niet? Geef een korte uitleg bij je antwoord.

(c) Neem aan dat het gewicht van een willekeurige Nederlander een normale verdeling heeft met verwachting 70 kilo en variantie 100 kilo^2. Een lift bevat 4 personen. Bereken de kans dat de personen in de lift samen meer dan 300 kilo wegen.

Oplossing Opgave 1

(a) (**7pt**) Stel de waardenverzameling van X en Y is $\{z_1, \ldots, z_n\}$ of $\{z_1, z_2, \ldots\}$ (met $n = \infty$). Als X en Y symmetrisch verdeeld zijn, dan

$$f_Z(a) = \sum_{i=1}^{n} f(a, z_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X = a, Y = z_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X = z_i, Y = a] = \sum_{i=1}^{n} f(z_i, a) = f_Y(a).$$

(b) (**8pt**) De waarden zijn af te lezen uit de volgende tabel:

$b\backslash a$	1	2	3	$\mathbb{P}[Y = b]$
1	$12/108$	$5/108$	$1/108$	$1/6$
2	$5/108$	$24/108$	$7/108$	$1/3$
3	$1/108$	$7/108$	$46/108$	$1/2$
$\mathbb{P}[X = a]$	$1/6$	$1/3$	$1/2$	1

(c) (**10pt**) Er geldt

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+4+9}{6} = \frac{7}{3}.$$

Om de variantie te bepalen, berekenen we eerst

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+8+27}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

Dan volgt dat

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 6 - \frac{49}{9} = \frac{54-49}{9} = \frac{5}{9}.$$

De voorwaardelijke kans berekenen we met

$$\mathbb{P}[X \text{ is oneven} \,|\, X \geq Y] = \frac{\mathbb{P}[X \text{ is oneven en } X \geq Y]}{\mathbb{P}[X \geq Y]} = \frac{12+1+7+46}{12+5+25+1+7+46} = \frac{66}{95}.$$

Oplossing Opgave 2 Het gaat hier om trekken zonder terugleggen (Hypergeometrische verdeling).

(a) (**7pt**)

$$\mathbb{P}(\text{allen wit} \,|\, 3 \text{ gegooid}) = \mathbb{P}(3 \text{ ballen getrokken en allen wit}) = \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{28}.$$

(b) (**11pt**)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{allen wit}) &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(\text{allen wit en } k \text{ gegooid}) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(\text{allen wit} \,|\, k \text{ gegooid})\mathbb{P}(k \text{ gegooid}) \\
&= \sum_{k=1}^{5} \mathbb{P}(\text{allen wit} \,|\, k \text{ gegooid})\mathbb{P}(k \text{ gegooid}) = \sum_{k=1}^{5} \frac{\binom{5}{k}\binom{3}{0}}{\binom{8}{k}} \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} + \frac{\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} + \frac{\binom{5}{5}}{\binom{8}{5}}\right) = \frac{5}{24}
\end{aligned}$$

(c) (**7pt**) Volgens de Wet van Bayes

$$\mathbb{P}(3 \text{ gegooid} \,|\, \text{allen wit}) = \frac{\mathbb{P}(\text{allen wit} \,|\, 3 \text{ gegooid})\mathbb{P}(3 \text{ gegooid})}{\mathbb{P}(\text{allen wit})} = \frac{\frac{5}{28}\frac{1}{6}}{\frac{5}{24}} = \frac{1}{7}.$$

Oplossing Opgave 3

(a) (**9pt**) De functie F continu en stijgend, verder zijn de limieten voor $x \to -\infty$ en $x \to \infty$ gelijk aan 0, respectievelijk 1. De pdf krijgen we door de afgeleide van F te nemen:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F(x) = e^{-(e^{-x}+x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(b) (**8pt**) Voor de mediaan x_1 geldt $\frac{1}{2} = F(x_1) = -e^{-e^{-x_1}}$. Dus $-e^{-x_1} = \log \frac{1}{2} = -\log 2$, oftewel $x_1 = -\log(\log 2)$.
Voor de mode x_2 geldt $f_X(x_2) = e^{-(e^{-x_2}+x_2)}$ maximaal is, wat gebeurt als $-(e^{-x_2} + x_2)$ maximaal is, oftewel, als $g(x) = e^{-x} + x$ minimaal is. Dit gebeurt bij een punt x waar $1 - e^{-x} = g'(x) = 0$. Maar dat gebeurt alleen voor $x = 0$. Uit het feit dat f_X positief en continu is en dat de limieten $(x \to \pm\infty)$ naar 0 gaan (dit is zoomdat f_X een pdf is), volgt nu dat f_X te 0 een uniek maximum heeft.

(c) (**8pt**) Via de CDF van X. Merk op dat e^{-X} alleen waarden in $(0, \infty)$ aanneemt. Dus $F_Y(y) = 0$ voor $y \le 0$. Voor alle $y > 0$ geldt

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \le y] = \mathbb{P}[e^{-X} \le y] = \mathbb{P}[-X \le \log y] = \mathbb{P}[X \ge -\log y] = 1 - \mathbb{P}[X < -\log y] \\ &= 1 - \mathbb{P}[X \le -\log y] = 1 - F_X(-\log y) = 1 - e^{-e^{\log y}} = 1 - e^{-y}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $Y \sim \text{EXP}(1)$.
Via de pdf van X. Definieer $u(x) = e^{-x}$. Dan $w(y) = u^{-1}(y) = -\log y$. Volgens Stelling 6.3.2 wordt F_Y, voor $y > 0$, gegeven door

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot |w'(y)| = e^{-(e^y - \log y)} \cdot |\frac{-1}{y}| = e^{-y+\log y}\frac{1}{y} = e^{-y}e^{\log y}\frac{1}{y} = e^{-y}.$$

Hieruit volgt ook dat Y exponentieel verdeeld is met parameter $\theta = 1$.

Oplossing Opgave 4

(a) (**7pt**) Niet correct, als een van de twee gebeurtenissen kans 1 heeft, zijn ze wel onafhankelijk. Echter, als de gebeurtenis geen kans 1 of 0 heeft, is de uitspraak wel correct.

(b) (**8pt**) Correct, stel $X \sim \text{EXP}(\theta)$, dan

$$F_{2X}(x) = \mathbb{P}[2X \le x] = \mathbb{P}[X \le x/2] = F_X(x/2) = 1 - e^{-x/2\theta}.$$

Dus $2X \sim \text{EXP}(2\theta)$.

(c) (**10pt**) Zij X het gewicht van de 4 personen. Dan $X \sim \text{N}(280, 400)$. (Dit is waar, zie Example 6.4.7, blz. 214, maar je mag ook opmerken dat uit de centrale limietstelling volgt dat X bij benadering normaal verdeeld is met $\mu = 280$ en $\sigma^2 = 400$.) Schrijf Φ voor de CDF behorende bij de standaard normale verdeling $\text{N}(0, 1)$. Dan

$$\mathbb{P}[X \ge 300] = 1 - \mathbb{P}[X \le 300] = 1 - \Phi((300 - 280)/20) = 1 - \Phi(1) \approx 0,1587.$$