Tentamen Logica 1

8 april 2013, 12:30–15:30.

Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Laat X, Y en Z willekeurige verzamelingen zijn. Bewijs dat voor de kardinaliteiten $|X|$, $|Y|$ en $|Z|$ geldt dat $\left(|X|^{|Y|}\right)^{|Z|} = |X|^{|Y|\times|Z|}$.

Opgave 2. (a) Zij X een welordening. Bewijs met inductie op X dat elke $x \in X$ te schrijven is als $x = l + n$, met l een limiet en $n \in \mathbb{N}$. (Deze schrijfwijze is ook uniek, maar dat hoeft u niet te bewijzen.)

(b) Zij X een oneindige welordening. Stel dat X aftelbaar veel limieten bevat. Bewijs dat X aftelbaar is.

Opgave 3. Een *simpele ongerichte graaf* is een verzameling G met een binair predikaat E zodanig dat voor alle $x, y \in G$ geldt $E(x,y) \to E(y,x)$. Een deelgraaf $M \subseteq G$ heet *volledig* als $E(x,y)$ voor alle $x, y \in M$. M is *maximaal volledig* als M volledig is en er geen volledige deelgraaf $N \subseteq G$ bestaat zodat $M \subsetneq N$. Bewijs dat voor elke graaf G en elke $x \in G$ er een maximaal volledige $M \subseteq G$ bestaat zodat $x \in M$. (Hint: Zorn.)

Opgave 4. Laat L de taal zijn van ringen met eenheidselement, met constanten 0 en 1. Geef een voorbeeld van een L-zin die geldt in het model $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$, maar niet in $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. Hier zijn $+$ en $\cdot$ de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$.

Opgave 5. (a) Citeer de compactheidsstelling.

(b) Stel dat T een theorie is zodat het volgende geldt. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ bestaat er een $m \geqslant n$ en een model M van kardinaliteit $|M| = m$ zodat $M \models T$. Bewijs dat T een oneindig model heeft.