Hertentamen Logica 2

11 augustus 2014

Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Bewijs de volgende formules met natuurlijke deductie. (U hoeft niet de namen van de regels te vermelden. Geef wel met cijfers aan op welk punt aannames worden ingetrokken.)

(a) $\varphi \vee \neg\varphi$.

(b) Bewijs met natuurlijke deductie dat uit de formules $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ en $\neg\exists x(Q(x) \wedge R(x))$ volgt dat $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$.

Opgave 2. Stel dat Γ een zinnenverzameling is die gesloten is onder $\vdash$, dat wil zeggen, als $\Gamma \vdash \varphi$ dan $\varphi \in \Gamma$ voor alle φ. Stel dat Γ geen model heeft. Bewijs dat er een formule $\varphi \in \Gamma$ is zonder model.

Opgave 3. Een *lineair geordende groep* $(G, +, <)$ is een groep $(G, +)$ met een lineaire ordening $<$. Laat L de taal zijn met functiesymbool $+$ en predicaatsymbool $<$. G heet *archimedisch* als voor alle $a, b \in G$ met $\cancel{a, b > 0}$ $a \geq 0,\ b > 0$ er een $m \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $a < mb$. Hier is mb per definitie het element $b + \ldots + b$ (m keer). Merk op dat $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ met de gebruikelijke optelling voorbeelden zijn van archimedische lineair geordende groepen.

(a) Geldt dat $\mathbb{Z} \preccurlyeq \mathbb{R}$?

(b) Laat $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$ de theorie zijn van $\mathbb{R}$, dat wil zeggen, de verzameling van alle L-zinnen die gelden in $\mathbb{R}$. Bewijs dat er een niet-archimedische lineair geordende groep G bestaat zodat $G \models \mathrm{Th}(\mathbb{R})$.

Opgave 4. Laat L de taal zijn met één binair predicaatsymbool $<$, en zij T_d de L-theorie van dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten.

(a) Bewijs dat T_d volledig is. (Geef aan welke stellingen u hierbij gebruikt.)

(b) Beschouw het L-model $\mathbb{Q}$, met de gebruikelijke ordening. Bewijs dat voor alle L-zinnen φ geldt dat $\mathbb{Q} \models \varphi$ desda $T_d \vdash \varphi$.