Tentamen Logica 2

1 juli 2013, 12:30–15:30.

Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Bewijs de volgende formules met natuurlijke deductie. (U hoeft niet de namen van de regels te vermelden. Geef wel met cijfers aan op welk punt aannames worden ingetrokken.)

(a) $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \to (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

(b) $\exists x \varphi(x) \to \exists y \varphi(y)$.

Opgave 2. Zij Γ een maximaal consistente verzameling zinnen.

(a) Bewijs dat voor alle zinnen φ geldt: $\Gamma \vdash \varphi$ of $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

(b) Bewijs dat voor alle zinnen φ en ψ geldt: $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ dan en slechts dan als (als $\Gamma \vdash \varphi$ dan $\Gamma \vdash \psi$).

Opgave 3. Zij L een taal en laat M en N L-modellen zijn.

(a) Geef de definitie van $N \preccurlyeq M$ (elementair submodel).

(b) Zij L_N de taal L met constanten voor alle elementen van N. Stel $N \preccurlyeq M$. Bewijs dat voor alle L_N-zinnen van de vorm $\exists x \varphi(x)$ geldt: als $M \models \exists x \varphi(x)$ dan is er een $m \in N$ zodat $M \models \varphi(m)$.

Opgave 4. Laat L een aftelbare taal zijn, en T een ω-kategorische theorie. Stel verder dat elk eindig model van T een submodel is van een oneindig model van T.

(a) Laat M een aftelbaar oneindig model zijn van T. Bewijs dat voor alle kwantorvrije zinnen φ geldt: $T \models \varphi \Leftrightarrow M \models \varphi$.

(b) Bewijs dat voor alle kwantorvrije zinnen φ geldt: $T \vdash \varphi$ of $T \vdash \neg\varphi$.

Beknopte antwoorden

N.B. Andere antwoorden kunnen mogelijk zijn.

Opgave 1. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\varphi\vee(\psi\vee\chi)^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi^2}{\varphi\vee\psi}}{(\varphi\vee\psi)\vee\chi} \qquad \dfrac{\psi\vee\chi^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\psi^1}{\varphi\vee\psi}}{(\varphi\vee\psi)\vee\chi} \qquad \dfrac{\chi^1}{(\varphi\vee\psi)\vee\chi}}{(\varphi\vee\psi)\vee\chi}\,{\scriptstyle 1}}{(\varphi\vee\psi)\vee\chi}\,{\scriptstyle 2}}{\varphi\vee(\psi\vee\chi)\to(\varphi\vee\psi)\vee\chi}\,{\scriptstyle 3}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\varphi(x)^2 \qquad \dfrac{\varphi(z)^1}{\exists y\varphi(y)}}{\exists y\varphi(y)}\,{\scriptstyle 1}}{\exists x\varphi(x)\to\exists y\varphi(y)}\,{\scriptstyle 2}$$

Opgave 2. (a) Stel $\Gamma \nvdash \varphi$. Dan is $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ consistent. Als $\neg\varphi \notin \Gamma$ dan zou Γ niet maximaal zijn, dus geldt $\neg\varphi \in \Gamma$.

(b) ($\Rightarrow$) Als $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ en $\Gamma \vdash \varphi$ dan volgt met modus ponens dat $\Gamma \vdash \psi$.

($\Leftarrow$) Wegens (a) geldt $\Gamma \vdash \varphi$ of $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Als $\Gamma \vdash \varphi$ dan $\Gamma \vdash \psi$ per aanname, dus met $\to$I volgt $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Als $\Gamma \vdash \neg\varphi$ dan $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ met $\neg$E, dus $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ met $\bot$E. Met $\to$I volgt dan $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Opgave 3. (a) $N \preccurlyeq M$ als N en M dezelfde L_N-zinnen waar maken, zie syllabus p57, 58.

(b) Als $M \models \exists x\varphi(x)$ dan ook $N \models \exists x\varphi(x)$ wegens $N \preccurlyeq M$, dus $\exists m \in N(N \models \varphi(m))$, en dus ook $\exists m \in N(M \models \varphi(m))$.

Opgave 4. (a) Stel dat φ kwantorvrij is. Als $T \models \varphi$ dan $M \models \varphi$ want M is een model van T. Stel dat $T \not\models \varphi$. Dan is $T \cup \{\neg\varphi\}$ consistent, dus heeft een model M'. Als M' oneindig is dan is er wegens Löwenheim-Skolem een aftelbaar model met dezelfde theorie, en wegens ω-kategoriciteit is dit model M. Dus $M \models \neg\varphi$. Als M' eindig is is er wegens de aanname een oneindig model M'' dat M' bevat als submodel. Omdat φ kwantorvrij is geldt dus ook $M'' \models \neg\varphi$, en met Löwenheim-Skolem volgt weer dat $M \models \neg\varphi$. Dus in beide gevallen geldt $M \models \neg\varphi$, en dus $M \not\models \varphi$.

(b) Er geldt $M \models \varphi$ of $M \models \neg\varphi$, dus wegens (a) geldt $T \models \varphi$ of $T \models \neg\varphi$. Met de volledigheidsstelling volgt dat $T \vdash \varphi$ of $T \vdash \neg\varphi$.