Tentamen Logica 2

25 juni 2014

Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Bewijs de volgende formules met natuurlijke deductie. (U hoeft niet de namen van de regels te vermelden. Geef wel met cijfers aan op welk punt aannames worden ingetrokken.)

(a) $(\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi \vee \chi)$.

(b) $\exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$.

Opgave 2. Laat Δ en Γ zinnenverzamelingen zijn in een gegeven taal. Δ heet een *axiomatisering* van Γ als geldt dat

$$\Delta \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

voor alle zinnen φ. Bewijs dat Δ een axiomatisering is van Γ dan en slechts dan als Δ en Γ dezelfde modellen hebben.

Opgave 3. Beschouw $\mathbb{N}$ met de gebruikelijke ordening $<$, en zij $E \subseteq \mathbb{N}$ de verzameling even getallen.

(a) Geldt dat E een submodel is van $\mathbb{N}$?

(b) Geldt dat $E \preccurlyeq \mathbb{N}$ (elementair submodel) ?

(c) Geldt dat E isomorf is met $\mathbb{N}$?

Opgave 4. Beschouw het model $\mathbb{R}$ met de gebruikelijke optelling $+$ en vermenigvuldiging $\cdot$, in de taal L met functiesymbolen $+$ en $\cdot$. Beschouw de verzameling $T = \mathrm{Th}(\mathbb{R})$ van alle L-zinnen die gelden in dit model $\mathbb{R}$.

(a) Heeft T een aftelbaar model?

(b) Beschouw nu de taal $L_{\mathbb{R}}$ met functiesymbolen $+$ en $\cdot$, en constanten voor alle elementen van $\mathbb{R}$. Laat T' de verzameling $L_{\mathbb{R}}$-zinnen zijn die gelden in het model $\mathbb{R}$. Heeft T' een aftelbaar model?

Beknopte antwoorden

N.B. Andere antwoorden kunnen mogelijk zijn.

Opgave 1. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi)]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \qquad [\varphi \to \psi]^1}{\psi}}{\psi \vee \chi} \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \qquad [\varphi \to \chi]^1}{\chi}}{\psi \vee \chi}}{\psi \vee \chi}{\scriptstyle 1}}{\varphi \to \psi \vee \chi}{\scriptstyle 2}}{(\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi \vee \chi)}{\scriptstyle 3}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x \forall y P(x,y)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y P(u,y)]^1}{P(u,v)}}{\exists x P(x,v)}}{\forall y \exists x P(x,y)}}{\forall y \exists x P(x,y)}{\scriptstyle 1}}{\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)}{\scriptstyle 2}$$

Opgave 2. Stel dat voor alle modellen M geldt

$$M \models \Delta \iff M \models \Gamma \tag{1}$$

Stel verder dat $\Delta \vdash \varphi$. We bewijzen dat $\Gamma \vdash \varphi$. Uit de aanname volgt met soundness dat $\Delta \models \varphi$. Wegens (1) geldt φ in elk model van Γ, dus $\Gamma \models \varphi$, en met volledigheid volgt $\Gamma \vdash \varphi$. De richting $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$ is symmetrisch.

Omgekeerd, stel dat $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Delta \vdash \varphi$, en stel dat $M \models \Delta$. Voor alle $\varphi \in \Gamma$ geldt $\Gamma \vdash \varphi$, dus $\Delta \vdash \varphi$ wegens de aanname, en dus $\Delta \models \varphi$ wegens soundness. We zien dat dus $M \models \Gamma$. De omgekeerde richting is weer symmetrisch. Dit bewijst (1).

Opgave 3. (a) $E \subseteq \mathbb{N}$ is een submodel, namelijk geldt voor alle $n, m \in E$ dat $E \models n < m$ desda $\mathbb{N} \models n < m$.

(b) E is geen elementair submodel van $\mathbb{N}$, want de zin $\exists x(0 < x \wedge x < 2)$ (dit is een zin in de taal L_E met constanten uit E) geldt wel in $\mathbb{N}$ maar niet in E.

(c) E is isomorf met $\mathbb{N}$, want de afbeelding $n \mapsto 2n$ is een isomorfisme van $\mathbb{N}$ naar E.

Opgave 4. (a) T is een consistente verzameling L-zinnen met een oneindig model, en L is aftelbaar, dus wegens de neerwaartse Löwenheim-Skolem-stelling heeft T een aftelbaar model.

(b) Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ bevat T' de $L_{\mathbb{R}}$-zin $a \neq b$. In het bijzonder is elk model van T' overaftelbaar.