# Hertentamen Differentieerbare variëteiten
# 3 april 2024, 12:45–15:45

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van het boek, andere aantekeningen of een (grafische) rekenmachine zijn niet toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven, vergeet de laatste onderdelen op bladzijde 4 niet!
- Je kunt maximaal 35 punten verdienen. Als je $n$ punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/35 + 1$.
- Veel succes!

**Opgave 1** (3 punten)**.** Stel dat $M$ en $N$ gladde variëteiten zijn, en $F\colon M \to N$ een diffeomorfisme. Zij $(U, \varphi)$ een kaart van $N$. Bewijs dat $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ een kaart is van $M$. (D.w.z. dat $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ bevat is in de impliciet gegeven maximale atlas voor $M$.)

*Oplossing.* Omdat $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ een homeomorfisme is, en $F\colon F^{-1}(U) \to U$ ook, is $\varphi \circ F\colon F^{-1}(U) \to \varphi(U)$ een homeomorfisme (1).

Zij nu $(V, \psi)$ een kaart van $M$, zo dat $V \cap F^{-1}(U) \neq \emptyset$. Dan is

$$\psi \circ (\varphi \circ F)^{-1} = \psi \circ F^{-1} \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap F(V)) \to \mathbb{R}^m.$$

Deze afbeelding is glad omdat $F^{-1}$ glad is (1). Net zo is

$$(\varphi \circ F) \circ \psi^{-1}\colon \psi(F^{-1}(U) \cap V) \to \mathbb{R}^m.$$

glad omdat $F$ glad is (1).

**Opgave 2.** Zij $M_2(\mathbb{R})$ de vectorruimte van reële $2 \times 2$ matrices. Beschouw de determinant-afbeelding $\det\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(a) [1 punt] Bewijs kort dat deze afbeelding det glad is.

(b) [3 punten] Bewijs dat de afgeleide $d(\det)_A\colon T_A M_2(\mathbb{R}) \to T_{\det(A)}\mathbb{R}$ surjectief is voor alle $A \neq 0$.

(c) [2 punten] Bewijs dat

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}); \det(A) = 1\}$$

een ingebedde deelvariëteit van $M_2(\mathbb{R})$ is.

*Oplossing.*

(a) De determinant van een matrix is een polynoom in de matrixelementen.

(b) We identificeren $M_2(\mathbb{R})$ met $\mathbb{R}^4$ door een matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ af te beelden op $(a,b,c,d)$. Zij $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Door partiële afgeleides te berekenen zien we dat de matrix van $D(\det)(A)\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gelijk is aan $(d, -c, -b, a)$ (1). Dus deze afbeelding is surjectief dan en slechts dan als $A \neq 0$ (1). En $d(\det)_A$ is surjectief dan en slechts dan als $D(\det)(A)$ dat is (1).

(c) Omdat $\det(0) = 0$ is $0 \notin \det^{-1}(1)$. Uit (b) vinden we dan dat 1 een reguliere waarde is van det (1). De bewering volgt dus uit de submersiestelling (1).

**Opgave 3.** Stel dat $M$ en $N$ gladde variëteiten zijn, en $F\colon M \to N$ een diffeomorfisme. Als $X \in \mathcal{X}(M)$ een glad vectorveld op $M$ is, definieer dan de afbeelding $F_*X\colon N \to TN$ door

$$(F_*X)(q) = \big(q, dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})\big),$$

voor $q \in N$. De rechterkant ligt in $\{q\} \times T_qN \subset TN$, wat we zoals gebruikelijk met de vectorruimte $T_qN$ identificeren. Zo wordt $F_*X$ een in eerste instantie niet per se glad vectorveld op $N$.

(a) [2 punten] Bewijs dat voor alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ en $f \in C^\infty(M)$ geldt dat

$$F_*(X+Y) = F_*X + F_*Y; \quad \text{en}$$
$$F_*(fX) = (f \circ F^{-1})F_*X.$$

(b) [3 punten] Zij $(U, \varphi)$ een kaart van $N$, en beschouw de kaart $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ van $M$. (Zie Opgave 1.) Als $q \in U$, beschouw dan de basisvector $\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_q \in T_qN$ gedefinieerd door $\varphi$. Als $p \in F^{-1}(U)$, zij dan $\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p \in T_pM$ de basisvector gedefinieerd door $\varphi \circ F$. Zo krijgen we vectorvelden $\frac{\partial}{\partial y^j} \in \mathcal{X}(U)$ en $\frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathcal{X}(F^{-1}(U))$. Bewijs dat

$$(F|_U)_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(c) [2 punten] Zij vanaf nu $X \in \mathcal{X}(M)$. Beschouw de functies $X^j$ op $F^{-1}(U)$ en $(F_*X)^j$ op $U$ zo dat voor alle $p \in F^{-1}(U)$ en $q \in U$,

$$X_p = \sum_j X^j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p;$$
$$(F_*X)_q = \sum_j (F_*X)^j(q) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_q.$$

Bewijs dat $(F_*X)^j = X^j \circ F^{-1}$.

(d) [2 punten] Bewijs dat $F_*X$ een glad vectorveld op $N$ is.

(e) [3 punten] Zij $J \subset \mathbb{R}$ een open interval, en $\gamma\colon J \to M$ een integraalkromme van $X$. Bewijs dat $F \circ \gamma$ een integraalkromme van $F_* X$ is.

*Oplossing.*

(a) Voor $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ en $q \in N$ is (1)

$$\begin{aligned}(F_*(X+Y))_q &= dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)} + Y_{F^{-1}(q)}) \\ &= dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}) + dF_{F^{-1}(q)}(Y_{F^{-1}(q)}) = (F_*X)_q + (F_*Y)_q.\end{aligned}$$

Voor $f \in C^\infty(M)$ en $q \in N$ is (1)

$$(F_*(fX))_q = dF_{F^{-1}(q)}(f(F^{-1}(q))X_{F^{-1}(q)}) = (f \circ F^{-1})(q)(F_*X)_q.$$

(b) Voor alle $q \in U$ is vanwege de definities en de kettingregel, (3)

$$\begin{aligned}\left((F|_U)_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)_q &= dF_{F^{-1}(q)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{F^{-1}(q)}\right) \\ &= dF_{F^{-1}(q)} \circ d(\varphi \circ F)^{-1}_{\varphi(q)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\varphi(q)}\right) \\ &= d\varphi^{-1}_{\varphi(q)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\varphi(q)}\right) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_q.\end{aligned}$$

(c) Vanwege onderdeel (a) (toegepast met $M$ vervangen door $U$) en (b) is voor alle $q \in U$, (2)

$$F_*(X|_{F^{-1}(U)}) = F_*\left(\sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_j (X^j \circ F^{-1}) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(d) De functies $X^j$ zijn glad omdat $X$ glad is (1). Vanwege (c) zijn de functies $(F_*X)^j$ dus ook glad (1), en dus is $F_*X$ glad.

(e) Voor alle $t \in J$ is (3)

$$(F\circ\gamma)'(t) = dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = dF_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) = dF_{\gamma(t)}(X_{F^{-1}((F\circ\gamma)(t))}) = (F_*X)_{F\circ\gamma(t)}.$$

**Opgave 4.** Zij $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ een gladde kromme. Stel dat $\gamma$ injectief is, en dat $\dot\gamma(t) \neq 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. (Hier is $\dot\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ de afgeleide van $\gamma$ in $t$ in de zin van calculus.) Stel ook dat er voor alle $r > 0$ een $R > 0$ is zo dat

$$\gamma^{-1}(B_0(r)) \subset (-R, R).$$

Hier is $B_0(r) \subset \mathbb{R}^n$ de open bol met middelpunt 0 en straal $r$.

(a) [3 punten] Bewijs dat $\gamma$ proper is.

(b) [3 punten] Bewijs dat het beeld $\mathrm{im}(\gamma)$ van $\gamma$ een ingebedde deelvariëteit van $\mathbb{R}^n$ is.

Omdat $\gamma$ injectief is, is $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{im}(\gamma)$ bijectief. We schrijven $\gamma^{-1}$ voor de inverse van deze afbeelding. We beschouwen vanaf nu de gladde structuur op $\mathrm{im}(\gamma)$ waarvoor $(\mathrm{im}(\gamma), \gamma^{-1})$ een kaart is. (Dit is dezelfde gladde structuur die $\mathrm{im}(\gamma)$ krijgt als ingebedde deelvariëteit van $\mathbb{R}^n$, maar dat hoef je niet te bewijzen of te gebruiken.)

Stel dat $\omega_1, \ldots, \omega_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ compacte drager hebben. Beschouw de differentiaalvorm

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \, dx^j \qquad \in \Omega^1(\mathbb{R}^n).$$

Zij $\iota\colon \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{R}^n$ de inclusie-afbeelding.

(c) [3 punten] Bewijs dat $\iota^*\omega$ een volumevorm op $\mathrm{im}(\gamma)$ is, met compacte drager.

(d) [5 punten] Zij $\gamma^j$ de $j$-de component van $\gamma$, dus $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Bewijs dat, met betrekking tot de oriëntatie op $\mathrm{im}(\gamma)$ waarvoor $\gamma^{-1}$ een geöriënteerde kaart is,

$$\int_{\mathrm{im}(\gamma)} \iota^*\omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \omega_j(\gamma(t))(\gamma^j)'(t) \, dt.$$

*Oplossing.*

(a) Zij $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Kies $r > 0$ zo dat $K \subset B_0(r)$ (1). Zij $R > 0$ als in de gegeven eigenschap van $\gamma$. Dan is

$$\gamma^{-1}(K) \subset (-R, R),$$

en is dus begrensd (1). Omdat $K$ gesloten is, en $\gamma$ continu, is $\gamma^{-1}(K)$ ook gesloten (1), en dus compact.

(b) We bewijzen eerst dat $\gamma$ een immersie is. De calculus-afgeleide van $\gamma$ in $t \in \mathbb{R}$ heeft de matrix $\dot\gamma(t)$ als afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ (1). Omdat $\dot\gamma(t) \neq 0$ is deze afgeleide injectief (1). Hetzelfde geldt dus voor de afgeleide $d\gamma_t$ van $\gamma$ in de zin van variëteiten.

We zien dat $\gamma$ een inbedding is, omdat injectieve, propere immersies dat zijn (1). Dus is zijn beeld een ingebedde deelvariëteit.

(c) De dimensie van $\mathrm{im}(\gamma)$ is 1, en $\iota^*\omega$ heeft graad 1 want terugtrekken van differentiaalvormen behoudt de graad (1).

En we zagen dat $\gamma$ proper is, dus $\gamma^{-1}(\mathrm{supp}(\omega))$ is compact (1). Het beeld onder $\gamma$ hiervan is ook compact, en gelijk aan $\mathrm{supp}(\omega) \cap \mathrm{im}(\gamma) = \mathrm{supp}(\iota^*\omega)$ (1).

(c) Voor alle $t \in \mathbb{R}$ is (4)

$$\begin{aligned}
((\gamma)^*(\iota^*\omega))_t &= ((\iota \circ \gamma)^*\omega)_t \\
&= \omega_{\gamma(t)} \circ d(\iota \circ \gamma)_t \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega_j(\gamma(t)) d(x^j \circ \iota \circ \gamma)_t \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega_j(\gamma(t)) d(\gamma^j)_t \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega_j(\gamma(t)) (\gamma^j)'(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Dus (1)

$$\int_{\mathrm{im}(\gamma)} \iota^*\omega = \int_{\mathbb{R}} ((\gamma^{-1})^{-1})^*(\iota^*\omega) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} \omega_j(\gamma(t))(\gamma^j)'(t) dt.$$