Ringen en Lichamen 1

Tentamen: 11 april 2013, 12.30-15.30

Vermeld op de eerste bladzijde rechtsboven:

naam, studentnummer, opleiding, naam assistent

en verder op ieder blad je naam.

Succes!

1. In deze opgave bekijken we ringen met een identiteit 1.

   (i) (3 punten) Laat zien dat er voor iedere ring R met identiteit precies één homomorfisme $f : \mathbb{Z} \to R$ bestaat dat 1 bewaart.

   De niet-negatieve voortbrenger van het ideaal $\ker(f)$ in $\mathbb{Z}$ heet de karakteristiek $char(R)$ van R.

   (ii) (4 punten) Laat zien dat de karakteristiek van een integriteitsgebied 0 of een priemgetal is.

2. Een idempotent in een ring R is een element $a \in R$ met $a^2 = a$.

   (i) (3 punten) Laat zien dat 0 en 1 de enige idempotenten zijn in een integriteitsgebied.

   (ii) (1 punt) Geef een voorbeeld van een ring met andere idempotenten dan 0 en 1.

   (iii) (3 punten) Laat zien: als R een ring is waarin alle elementen idempotent zijn, dan is R commutatief. (Hint: bekijk $a + b$.)

3. Bekijk de ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, d.w.z. de deelring van $\mathbb{R}$ met onderliggende verzameling $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   Laat $I = \langle\sqrt{2}\rangle$ het ideaal voorgebracht door $\sqrt{2}$ zijn.

   (i) (3 punten) Laat zien: $I = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mid a \text{ is even}\}$.

   (ii) (3 punten) Definieer $\phi\colon \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}_2$, $a + b\sqrt{2} \mapsto a \pmod 2$.
   Laat zien: ϕ is een ringhomomorfisme.

   (iii) (3 punten) Laat zien: I is een maximaal ideaal in R.

4. (i) (4 punten) Laat zien: in een eenduidige ontbindingsring R geldt: als $p \in R$ irreducibel is, dan is $\langle p \rangle$ een priemideaal.

   (ii) (3 punten) Laat R een eenduidige ontbindingsring zijn en I een priemideaal in R met $I \neq \{0\}$. Laat zien dat er een hoofdideaal $\langle a \rangle$ in R bestaat met: $\langle a \rangle$ is een priemideaal en $\{0\} \subsetneq \langle a \rangle \subseteq I$.

   (iii) (3 punten) Laat I een ideaal zijn in $\mathbb{Z}$ met $I \neq \mathbb{Z}$ en I *niet* priem. Laat zien dat er geen priemideaal J in $\mathbb{Z}$ is met $\{0\} \subsetneq J \subseteq I$.

5. Laat F een lichaam zijn.

   (i) (4 punten) Laat $g \in F[x]$ zodat $F[x]/\langle g \rangle$ een lichaam is. Laat zien dat g irreducibel is.

   (ii) (4 punten) Laat $g \in F[x]$ een irreducibel element zijn. Bewijs dat $F[x]/\langle g \rangle$ een lichaam is.
   (Hint: Laat zien dat voor $h \in F[x]$ met $h \notin \langle g \rangle$ geldt dat 1 een grootste gemene deler is van h en g.)