Tentamen symmetrie

24 januari 2012, 8:30-11:30
Plaats: Hal 1

Er zijn vijf sommen. Doe eerst die onderdelen die je denkt te kunnen.
Alle vectorruimten die hieronder voorkomen zijn eindig dimensionale vectorruimten over de complexe getallen; alle groepen die hieronder voorkomen zijn eindige groepen.
We schrijven voor representaties (V, ρ) steeds kortweg V.

Som 1.

(a) Schrijf het volgende element van de symmetrische groep S_9 als product van disjunkte cykels:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 9 & 2 & 4 & 8 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Wat is de orde van $(1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9) \in S_9$?

(c) Schrijf bovenstaand element $(1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9)$ als product van verwisselingen.

(d) Is $(2\ 4\ 6\ 8)(1\ 3\ 5\ 7\ 9)$ een even of een oneven permutatie? Motiveer je antwoord.

Som 2.

(a) Beschrijf de conjugatieklassen van S_3. Hoeveel zijn dat er? Hoe groot is elk van die conjugatieklassen?

(b) Geef de commutator-ondergroep $[S_3, S_3]$ van S_3 en de abelisatie $(S_3)^{\mathrm{ab}} = S_3/[S_3, S_3]$.

(c) Hoeveel (niet-equivalente) irreducibele representaties van dimensie 1 heeft S_3?

(d) Hoeveel (niet-equivalente) irreducibele representaties heeft S_3, en wat is hun dimensie?

(e) Stel de karaktertabel van S_3 op.

Som 3.

We bekijken representaties van een gegeven eindige groep G.

(a) Bewijs dat als V een irreducibele representatie is, zijn duale V^* dat ook is. (Hint: gebruik karakters.)

(b) Bewijs dat als $V \otimes V^*$ irreducibel is, V dimensie 1 moet hebben.

(c) Bewijs dat als G een even aantal conjugatieklassen heeft, er altijd minstens één niet-triviale representatie V moet zijn met de eigenschap dat V equivalent is aan zijn duale V^*.

Som 4.

Gegeven een eindige groep G die werkt op een eindige verzameling X.
Schrijf $\pi : X \to X/G$ voor de quotient-afbeelding naar de banenverzameling (dat wil zeggen: π stuurt een element x naar zijn baan onder de werking).
Laat V de vectorruimte zijn met basis $\{e_x \mid x \in X\}$.
Laat ρ de representatie van G op V zij gegeven door $\rho(g)(e_x) = e_{gx}$.

(a) Ga na dat als $a : X/G \to \mathbb{C}$ een willekeurige functie is, dan is de vector

$$v_a = \sum_{x \in X} a(\pi(x))e_x$$

invariant, d.w.z. $v_a \in V^G$.

(b) Bewijs dat elke invariante vector in V van deze vorm is.

(c) Concludeer dat $\dim(V^G) = |X/G|$.

Som 5.

Beschouw de standaard-representatie V van D_4 van dimensie 2 (zoals gezegd, over de complexe getallen).

(a) Beschrijf de representatie t.o.v. de standaard basis e_1, e_2 en bereken het karakter van V.

(b) Leid hieruit af dat V irreducibel is.

(c) Beschrijf de representatie gegeven door het tensorproduct $V \otimes V$ expliciet in termen van de standaard basis voor het tensorproduct van vectorruimten $(e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$.

(d) Is deze representatie $V \otimes V$ irreducibel?