**Beknopte uitwerkingen tentamen symmetrie**

24 januari 2012, 8:30-11:30

**Som 1.**

(a) (1 3 9)(2 7 5 4)(6 8)

(b) De orde van een cykel is zijn lengte, de orde van een product van disjunkte cykels is het kleinste gemene veelvoud van de ordes, in dit geval $2 \cdot 3 \cdot 4 = 12$.

(c) Er zijn een aantal standaard manieren om een cykel $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$ als product van verwisselingen te schrijven, bijvoorbeeld als

$$(1\ n)(1\ n-1)\cdots(1\ 3)(1\ 2).$$

We zien hieruit ook dat een cykel van lengte $n$ een product van $n-1$ verwisselingen is, dus de cykel is even (resp oneven) dan en slechts dan als $n$ oneven (resp even) is.

(d) Uit bovenstaande volgt dat dit oneven is.

**Som 2.**

(a) Conjugatieklassen corresponderen met cykeltypes, dat zijn er in dit geval drie: (1) met één element, (1 2) met drie elementen, en (1 2 3) met twee elementen.

(b) De commutatorondergroep is $A_3$ en de abelisatie is isomorf met $C_2$. (Merk op dat (1 2)(1 2 3) = (2 3) terwijl (1 2) en (2 3) geconjugeerd zijn, dus (1 2 3) is een commutator; dus de abelisatie heeft twee elementen.)

(c) Dit zijn er twee, namelijk de orde van de abelisatie $C_2$.

(d) Er zijn drie conjugatieklassen dus drie inequivalente representaties. Twee daarvan heben dimensie 1, dus volgens de formule voor de orde van de groep

$$\mathrm{orde}(G) = \sum \dim(V)^2$$

moet er nog een irreducibele representatie van dimensie 2 zijn.

(e) De triviale representatie en de tekenrepresentatie van $C_2$ geven de irreducibele representaties van $S_3$ van dimensie 1, en in de eerste kolom van de karaktertabel staat de dimensie, dus:

| | (1) | (1 2) | (1 2 3) |
|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_3$ | 2 | | |

hebben we al. De ontbrekende getallen zijn nu makkelijk te vinden met behulp van de orthogonaliteitsrelaties. We vinden op deze manier:

| | (1) | (1 2) | (1 2 3) |
|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_3$ | 2 | 0 | -1 |

**Som 3.**

(a) Een representatie V is irreducibel dan en slechts dan als $< \chi_V, \chi_V >= 1$. De formules voor het inproduct en het feit dat $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$ leveren dat

$$< \chi_V, \chi_V >=< \chi_{V^*}, \chi_{V^*} > .$$

(b) Je kunt met karakterformules laten zien dat de triviale representatie één keer voorkomt in $V \otimes V^*$. Als de laatste irreducibel is, dan moet hij dus wel samenvallen met de triviale representatie.

Alternatief: de evaluatie-afbeelding $(v, f) \mapsto f(v)$ is een intertwiner tussen $V \otimes V^*$ en de triviale representatie. Gebruik nu dat elke intertwiner tussen irreducibele representaties of de nulafbeelding, of een isomorfisme is.

(c) Het aantal conjugatieklassen is gelijk aan het aantal irreducibele representaties, waaronder altijd de triviale. Stel dat geen enkele niet-triviale representatie equivalent is aan zijn duale. Dan komen de niet-triviale representaties in paren $V, V^*$ voor, dus daar zijn er een even aantal van. Samen met de triviale representatie geeft dat dus een oneven aantal conjugatieklassen.

**Som 4.**

(a) Dit volgt eenvoudig door uitschrijven, gebruikmakend van het feit dat $\pi(x) = \pi(g \cdot x)$.

(b) Schrijf een willekeurige vector $v$ als lineaire combinatie van basisvectoren,

$$v = \sum_{x \in X} a_x e_x.$$

Uit invariantie $g \cdot v = v$ haal je al snel dat $a_x = a_{g \cdot x}$, voor elke $g \in G$ en $x \in X$. Dus $a_x$ hangt alleen af van de baan $\pi(x)$.

(c) Uit het voorgaande volgt dat elke invariante vector uniek geschreven kan worden als lineaire combinatie van de vectoren $v_\xi = \sum_{x \in \xi} e_x$, waarbij $\xi$ loopt over alle banen $\xi \in X/G$.

**Som 5.**

(a) $D_4$ heeft twee voortbrengers $t$ van orde 2 en $r$ van orde 4, met matrices ten opzichte van de standaard basis voor $\mathbb{C}^2$ gegeven door

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maar door matrices te vermenigvuldigen, vinden we dan:

$$R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$TR = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$TR^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TR^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieruit rekenen we direct de karakters uit (deze zijn 0,0,-2,0,0,0,0 en voor de eenheidsmatrix 2).

(b) Met behulp van deel (a) zien we:

$$< \chi, \chi >= \frac{1}{8}(0^2 + 0^2 + (-2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2^2) = 1,$$

en dus is deze representatie irreducibel.

(c) We weten: de representatie $V \otimes V$ stuurt $e_i \otimes e_j$ naar $\rho(g)(e_i) \otimes \rho(g)(e_j)$. We kunnen dit voor alle 4 combinaties van $e_i \otimes e_j$ uitschrijven voor zowel $g = r$ als $g = t$.

Alternatief: de matrix van de tensorrepresentatie is het Kronecker-product van de matrices van de oorspronkelijke representatie.

We vinden zo voor de matrices $T \otimes T$ en $R \otimes R$:

$$T \otimes T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en

$$R \otimes R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Er zijn een aantal manieren om dit te doen: je kunt expliciet een invariante deelruimte van $V \otimes V$ aangeven, bijvoorbeeld die opgespannen door de diagonaalelementen $e_i \otimes e_i$ $(i = 1, 2)$.

Of je kunt het inproduct $< \chi, \chi >$ uitrekenen, door bovenstaande matrices te gebruiken of door te gebruiken dat het karakter van de tensorrepresentatie het product van de karakters is. Of je kunt de formule voor de orde van de groep als som van kwadraten van dimensies van irreducibele representaties gebruiken, en concluderen dat er helemaal geen irreducibele representatie van dimensie 4 kan bestaan!