Symmetrie deeltentamen 1

Datum: 2 november
Tijd: 14–17 uur
Plaats: Hg00.071

Schrijf op ieder ingeleverd blad je naam en studentnummer. Schrijf ook op het eerste blad het totaal aantal ingeleverde bladen. Doe eerst de sommen die je denkt te kunnen. Succes!

1. Bekijk de verzameling $X = \mathbb{Q} - \{0, 1\}$ van rationale getallen behalve 0 en 1. Definieer permutaties a en b van X door $a(t) = t^{-1}$ en $b(t) = 1-t$. Bepaal de ondergroep G van $\mathrm{Sym}(X)$ voortgebracht door a, b. Geef de orde van deze ondergroep G, en ook de orde van elk element van G.

2. (a) Geef alle ondergroepen van $C_2 \times C_3$. Geef ook een argument dat dit ze inderdaad allemaal zijn.
   (b) Doe hetzelfde voor $C_2 \times C_2$.

3. Zij G een groep, en H een ondergroep van G. Laat p een element zijn van G dat niet in H zit. Schrijf $pH = \{ph \mid h \in H\}$, en analoog $pHp = \{php \mid h \in H\}$. Neem aan dat $pHp \subseteq H$.
   (a) Bewijs dat het product van een element uit H en een uit pH weer in pH zit.
   (b) Bewijs ook dat de inverse van een element uit pH weer in pH zit.
   (c) Schrijf K voor de vereniging van H en pH. Bewijs dat K een ondergroep van G is.
   (d) Bewijs dat H een normale ondergroep van deze groep K is.
   (e) Bepaal het aantal linker nevenklassen van H in K.

4. Bekijk de octaëder X, opgespannen door zes punten in $\mathbb{R}^3$ — de basisvectoren en hun tegengestelden. Schrijf $\mathcal{O}$ voor de octaëdergroep. Dit is de ondergroep van $SO(3)$ bestaande uit die transformaties die de hoekpunten van X naar hoekpunten van X sturen, en dus X in zichzelf over voeren.

   Suggestie bij deze opgave: ga niet meteen met matrices rekenen. Het is waarschijnlijk makkelijker om meetkundig te redeneren.

   (a) De groep $\mathcal{O}$ werkt dus op de verzameling V van zes hoekpunten van deze octaëder X. Ga na dat $\mathcal{O}$ ook werkt op de verzameling E van twaalf ribben, en coordinaatsgewijs op het product $V \times E$.
   (b) Beschrijf de stabilisatorgroep van een hoekpunt v, een ribbe e, en een paar (v, e).

(c) Bewijs dat de werkingen op V en op E transitief zijn, en die op $V \times E$ vrij.

(d) Hoeveel banen heeft die laatste werking op $V \times E$? Geef voor een vast gekozen hoekpunt v en elke baan U een ribbe e zodat (v, e) in U zit.

5. Bekijk weer het product $C_2 \times C_2$. Alle isomorfismen van $C_2 \times C_2$ naar zichzelf vormen weer een groep, die men noteert als $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2)$. Bewijs dat deze groep isomorf is met D_3.

   Hint: vind eerst eens elementen van orde 2 en orde 3 in $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2)$.