Beknopte uitwerkingen deeltentamen Symmetrie — 7 november 2011

1. De groep voortgebracht door a en b bestaat uit de elementen beschreven door de "woorden" in de letters a,b, en hun inverses. Rekenen met de expliciete functies a en b levert al snel dat $aa = e$ en $bb = e$, ma.w. a en b zijn van orde 2. Dus we hebben geen inverses nodig in de woorden, en kunnen voorkomens van aa of bb wegstrepen. Dus de woorden die overblijven zijn alternerende rijtjes van a's en b's, van de vorm $ababab \dots ba$ (of $bababa \dots ba$, of idem eindigend op b). Verder rekenen geeft dat ab, ba en aba verschillend zijn, maar $aba = bab$. Dus woorden van vier (of meer) letters zijn te reduceren, bijvoorbeeld $abab = babb = ba$, en dit is de inverse van ab. Dus ab is van orde 3, net als ba, en aba is van orde 2. De orde van de groep is 6.

2. Elk product $G \times H$ heeft als ondergroepen in elk geval de triviale groepen $G \times H$ en alleen de eenheid $\{(e, e)\}$, en $\{e\} \times H$ en $G \times \{e\}$. Als G en H hetzelfde zijn, dan is er ook altijd nog de diagonaal $\{(g, g) \mid g \in G\}$.

(a) $C_2 \times C_3$ is isomorf aan C_6. Elke ondergroep van een cyclische groep is cyclisch, van een orde die 6 deelt. Dus bovenstaande gevallen zijn de enige.

(b) Hier komt ook de diagonaal nog bij. Alle niet-triviale ondergroepen moeten orde twee hebben, dus dit zijn ze allemaal.

3. (a) We moeten $(ph)^{-1}$ met $h \in H$ in de vorm pk schrijven met $k \in H$. Dus we zoeken een k met $pkph =$ e, m.a.w. $k = p^{-1}h^{-1}p^{-1} = (php)^{-1}$, en dit zit inderdaad in H vanwege de aanname.

Andere "stijl": De vraag is of $(pH)^{-1}$ bevat is in pH, ofwel of $p^{-1}H^{-1}p^{-1}$ bevat is in H. Dit is duidelijk uit de aanname, want $p^{-1}h^{-1}p^{-1} = (php)^{-1}$ en $H = H^{-1}$.

(b) We moeten laten zien dat pHH en HpH bevat zijn in pH. Voor pHH is dat duidelijk. Voor HpH kun je dit op verschillende manieren aantonen. Een mogelijkheid is op te merken dat uit de aanname volgt dat pp in H zit. Schrijf dan een element hpk uit HpH als $p(pp)^{-1}(php)k$, dat is iets in $(pHp)HpH$, bevat in pH volgens aanname.

(c) volgt uit (a) en (b).

(d)Voor normaliteit van H in K moeten we bewijzen dat xHx^{-1} bevat is in H, voor $x \in H$ of $x \in pH$. Dat is duidelijk voor $x \in H$. En als x in pH zit, dan ook z'n inverse wegens (a), dus xHx^{-1} zit in $(pH)H(pH)$, weer bevat in H volgens de aanname.

(e) Er zijn twee nevenklassen, H en pH.

4. (a) O werkt op de de verzameling v van hoekpunten, min of meer per definitie. De groep O werkt dus ook op paren hoekpunten, en omdat de werking afstanden behoudt, moeten paren die een ribbe definiëren weer naar paren die een ribbe definiëren gestuurd worden. Dus O werkt op de verzameling E van ribben (opgevat als deelverzameling van $V \times V$). Een werking op V en een werking op E geven een werking op het product $V \times E$ (eerder sommetje op werkcollege).

(b) Als v een hoekpunt is en a is een element van O dat v op z'n plaats laat, dan laat a ook het tegenoverliggende punt v' op z'n plaats, dus a moet een draaiing zijn om de as van v naar v'. Er zijn vier zulke draaiingen (in het vlak opgespannen door de overblijvende vier hoekpunten). De stabilisatorgroep van v is cyclisch van orde 4. (Precies zo op college behandeld.)

Bekijk nu een element b van O dat een ribbe e op zijn plaats laat, zeg de ribbe tussen hoekpunten v en w. Uit het voorgaande volgt dat als b zowel v als w op hun plaats houdt, b de identiteit moet zijn. De andere mogelijkheid is dat b de hoekpunten v en w verwisselt. De punten v en w spannen samen met daartegenoverliggende punten v' en w' een vierkant binnen X op. Naast v zelf is v' het enige punt dat niet aan v vast zit met een ribbe, en idem voor w en w'. Dus b verwisselt ook v' en w'. Dan moet b wel een rotatie zijn om de lijn die vw en $v'w'$ doormidden snijdt. De stabilisator van e is dus van orde twee.

De stabilisator van een paar (v, e) is triviaal, dat volgt vrij makkelijk uit het voorgaande.

(c) De voorgaande zin betekent dat de werking op $V \times E$ vrij is. Het is niet moeilijk expliciete rotaties te beschrijven die een hoekpunt v naar een willekeurig ander hoekpunt w sturen, dus de werking op V is transitief. Hetzelfde geldt voor de werking op E. (Bekijk bijvoorbeeld een hoekpunt v. Dan kun je door draaien om de lijn van v naar het tegenoverliggend hoekpunt v' elke ribbe vanuit v naar elke andere ribbe vanuit v overvoeren. En door draaien in het vlak waar v en v' in liggen de vier ribben in van dat vierkant in elkaar overvoeren. Samenstellen van deze twee typen rotaties brengt elke ribbe naar elke andere ribbe.)

(d) Er zijn $6 \cdot 12 = 72$ elementen in $V \times E$, en O is van orde 24, dus er zijn $72/24 = 3$ banen. Voor en vast hoekpunt v kun je drie ribben d, e, f aangeven die (of: waarvan de eindpunten) op verschillende afstanden van v liggen. Dan moeten de paren $(v, d), (v, e), (v, f)$ wel in verschillende banen liggen.

5. $C_2 \times C_2$ heeft vier elementen $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, die we voor het gemak even schrijven als e (eenheid), a,b, en c. Voor a, b, c geldt dat elk van de drie som is van de andere twee. Dus een automorfisme wordt bepaald door een permutatie van a,b, en c. M.a.w. $Aut(C_2 \times C_2) = S_3$. Een isomorfisme $D_3 \to Aut(C_2 \times C_2)$ is volledig bepaald door de rotatie-voortbrenger r van orde 3 naar een cyclische permutatie van a, b, c van orde 3 te sturen, en de spiegelings-voortbrenger t naar een verwisseling.

NORMERING: Alle sommen tellen even zwaar, en net als bijvoorbeeld bij zeilwedstrijden wordt de "slechtste som" per persoon weggestreept.