Hertentamen Topologie, Najaar 2008

27.04.2009

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve het boek van Runde.
- Als je stellingen uit het boek gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de andere delen wel te maken!!
- In het totaal zijn 40 punten te bereiken. ≥ 21 punten is zeker voldoende.

Opgave 1 (8 pt) Zij $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische ruimtes met (X, d_1) compact. Zij $f : X \to Y$ continu. Bewijs dat f uniform continu is. (Dus voor elk $\varepsilon > 0$ is er $\delta > 0$ zodanig dat $d_1(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.)

Opgave 2 (12 pt) Als X, Y topologische ruimtes zijn, dan heet een functie $f : X \to Y$ <u>proper</u> als $f^{-1}(K) \subset X$ compact is voor elk compact $K \subset Y$.

(i) Zij X, Y topologische ruimtes en $f \in C(X, Y)$. Bewijs dat $f(C) \subset Y$ compact is voor elk $C \subset X$ compact.

(ii) Zij X, Y locaal compacte Hausdorff ruimtes met een-punts compactificaties X_∞, Y_∞. Gegeven $f : X \to Y$, defineer $\widehat{f} : X_\infty \to Y_\infty$ door $\widehat{f} \restriction X = f$ en $\widehat{f}(\infty) = \infty$.

Bewijs dat $\widehat{f} \in C(X_\infty, Y_\infty)$ d.e.s.d.a. $f \in C(X, Y)$ en f is proper.

(iii) Zij X locaal compacte Hausdorff ruimte. Voor $C \subset X$ afgesloten, bewijs dat $C \cup \{\infty\} \subset X_\infty$ afgesloten is, terwijl $C \subset X_\infty$ afgesloten is d.e.s.d.a. C compact is.

(iv) Zij X, Y locaal compact Hausdorff en $f : X \to Y$ continu en proper. Gebruik (i) t/m (iii) om te bewijzen dat f afgesloten is. (Dus $C \subset X$ afgesloten $\Rightarrow f(C) \subset Y$ afgesloten.)

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 (8 pt) Voor en topologische ruimte X en $A \subset X$ defineren we een equivalentie relatie $\sim$ op X door $x \sim y \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; (x \in A \wedge y \in A)$. Nu defineeren we $X/A := X/\sim$, voorzien van de quotiententopologie. Bewijs de volgende beweringen:

(i) Als $A \subset X$ afgesloten en X regulier (T_3) dan is X/A Hausdorff.

(ii) Als $A \subset X$ afgesloten en X normaal (T_4) dan is X/A normaal.

Opgave 4 (12 pt) We willen bewijzen dat S^n enkelvoudig samenhangend is als $n \geq 2$.

(i) Zij $f \in C(I, S^n)$ met $f(0) = f(1)$ niet surjectief. Bewijs dat f pad-homotoop is aan een constante afbeelding.

Opmerking: We zijn nog niet klaar, want er zijn surjective continue afbeeldingen $S^1 \to S^n$!

(ii) Zij $f : I \to S^n$ met $f(0) = f(1)$. Gebruik het overdekkings-Lemma van Lebesgue om te bewijzen dat er een $n \in \mathbb{N}$ is zodanig dat f elk interval $[i/n, (i+1)/n]$, $i \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$ in een open hemisphere afbeeldt. (Voorbeeld voor een open hemisphere: $S^n \cap \{x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.)

(iii) Zij n, i zoals in (ii). Zij $g_i : [i/n, (i+1)/n] \to \mathbb{R}^{n+1}$ de affine functie zodanig dat $g_i(i/n) = f(i/n)$ en $g_i((i+1)/n) = f((i+1)/n)$. Bewijs dat

$$F_i(s,t) = \frac{tg_i(s) + (1-t)f(s)}{\|tg_i(s) + (1-t)f(s)\|}$$

een homotopie van $f \restriction [i/n, (i+1)/n]$ naar g_i is.

- Bewijs dat de combinatie $g : [0,1] \to S^n$ van de functies g_i homotoop aan f is.
- Bewijs dat g niet surjectief is. (Dan volgt uit (i) dat g – en dus f – homotoop aan een constante afbeelding is.)

Oplossingen

Oplossing 1 Zie een willekeurig boek over analyse in $\mathbb{R}^n$.

Oplossing 2 (i) Erg standard.

(ii) Per definitie is $\widehat{f} : X_\infty \to Y_\infty$ continu desda $\widehat{f}^{-1}(U) \subset X_\infty$ open is voor elk open $U \subset Y_\infty$. Er zijn twee gevallen (a) $\infty \notin U$ en (b) $\infty \in U$. (a) In dit geval is $\widehat{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$. Per definitie van τ_∞ is U open in Y_∞ desda U open in Y, en $f^{-1}(U)$ open in X desda $f^{-1}(U)$ open in X. Dus: $\widehat{f}^{-1}(U) \in \tau_\infty^X$ voor alle $\infty \notin U \in \tau_\infty^Y$ desda $f : X \to Y$ continu.

(b) De open $U \subset Y_\infty$ met $\infty \in U$ zijn per definitie de verzamelingen $Y_\infty - C$, waar $C \subset Y$ compact. Nu geldt $\widehat{f}^{-1}(Y_\infty - C) = X_\infty - \widehat{f}^{-1}(C) = X_\infty - f^{-1}(C)$, en dit is (weer per definitie) open desda $f^{-1}(C) \subset X$ compact is. Dus $\widehat{f}^{-1}(U) \in \tau_\infty^X$ voor alle $\infty \in U \in \tau_\infty^Y$ desda $f^{-1}(C) \subset X$ compact voor alle $C \subset Y$ compact, dus desda f proper. De combinatie van (a) en (b) geeft de bewering.

(iii) Als $C \subset X$ dan is $C \cup \{\infty\}$ afgesloten in X_∞ desda $X_\infty - (C \cup \{\infty\}) \subset X_\infty$ open is, en gezien $\infty \notin X_\infty - (C \cup \{\infty\})$ geldt dit desda $X - C \subset X$ open is, dus desda $C \subset X$ afgesloten.

Verder is $C \subset X_\infty$ afgesloten desda $X_\infty - C \subset X_\infty$ open is. Gezien de definitie van τ_∞ en $\infty \in X_\infty - C$ geldt dit desda $X_\infty - (X_\infty - C) = C$ compact is in X.

(iv) In de opgave had moeten staan dat f proper **en continu** is. Dan is $\widehat{f} : X_\infty \to Y_\infty$ (zoals in (ii) gedefineerd) continu. Als $C \subset X$ afgesloten is volgt met (iii) dat $C \cup \{\infty\} \subset X_\infty$ afgesloten is en dus compact (omdat X_∞ compact). Met (i) volgt dat $\widehat{f}(C \cup \{\infty\}) \subset Y_\infty$ compact is, dus afgesloten. Maar dit is gelijk aan $f(C) \cup \{\infty\}$, en met (iii) volgt dat $f(C) \subset X$ afgesloten is. (NB: De implicatie "$C \cup \{\infty\} \subset X_\infty$ afgesloten $\Rightarrow C \subset X$ afgesloten" was geen onderdeel van de opgave, maar moet hier toch bewezen worden!)

Oplossing 3 We kunnen en zullen X/A interpreteren als $(X - A) \cup \{p\}$, waar het punt p het beeld van $A \subset X$ onder de quotientenafbeelding $\phi : X \to X/A$ is. (Op $X - A$ is ϕ gewoon de identiteit.) In (i) en (ii) moeten we bewijzen dat X/A de T_1 eigenschap heeft, dus dat elke eenpunts-verzameling $\{x\} \in X/A$ afgesloten is, ofwel $X/A - \{x\}$ open. Per definitie is $U \subset X/A$ open als $\phi^{-1}(U) \subset X$ open is. Dus $\phi^{-1}(X/A - \{x\}) = X - \phi^{-1}(x)$ moet open zijn, dus $\phi^{-1}(x)$ afgesloten. Als $x = p$ dan geldt $\phi^{-1}(x) = A$, en dit is per aanname afgesloten. Als $x \neq p$ dan is $\phi^{-1}(x) = \{x\}$, dus afgesloten omdat X de T_1 eigenschap heeft. Dus X/A is T_1.

(i) Zij $x, y \in X/A, x \neq y$. Er zijn twee gevallen: (a) $x \neq p \neq y$ en (b) $x = p \neq y$ of andersom. In geval (a) geldt $x, y \in X - A$. X is T_3, dus Hausdorff. Er zijn dus $U, V \in \tau_X$ met $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$. [NB: Ons beroep op de Hausdorff eigenschap garandeerd niet dat $U \cap A = \emptyset = V \cap A$. Maar als beide intersecties niet-triviaal zijn, dan zijn $\phi(U)$ en $\phi(V)$ niet disjunct, want beide bevatten het punt p!!!] A is afgesloten, dus $X - A$ is open, dus $U' = U \cap (X - A)$ en $V' = V \cap (X - A)$ zijn open en disjunct. Gezien U', V' disjunct met A zijn geldt $\phi(U') \cap \phi(V') = \emptyset$. Ook geldt dat $\phi(U'), \phi(V') \in \tau_{X/A}$, want $\phi^{-1}(\phi(U')) = U', \phi^{-1}(\phi(V')) = V'$ zijn open. Dus: $\phi(U'), \phi(V')$ zijn disjuncte open verzamelingen in X/A die x respectivelijk y bevatten. (b) Stel $x = p, y \neq p$. Dan is $y \in X - A$ en omdat X T_3 is zijn er disjuncte open $U, V \subset X$ zodat $A \subset U, y \in V$. Uit het feit $A \subset U$ volgt dat de quotientenafbeelding alleen sommige punten van U met elkaar identifiert en niets met $V \subset X - U \subset X - A$ doet. Dus $\phi(U) \cap \phi(V) = \emptyset$. Verder geldt $\phi^{-1}(\phi(U)) = U$ (omdat $U \supset A$) en $\phi^{-1}(\phi(V)) = V$ (omdat $V \subset X - A$), dus $\phi(U), \phi(V) \subset X/A$ zijn open. Daarom zijn ze disjuncte open omgevingen van $x = p$ respectivelijk y, en X/A is T_3.

(ii) Stel dat $C_1, C_2 \subset X/A$ afgesloten en disjunct. Er zijn weer twee mogelijkheden: (a) $p \notin C_1$ en $p \notin C_2$ of (b) $p \in C_1, p \notin C_2$ of andersom. In geval (a), geldt $C_1, C_2 \subset X - A$. X is T_4, er zijn dus $U_1, U_2 \subset X$ disjunct en open zodanig dat $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$. Dan zijn ook

$U_i' = U_i \cap (X - A)$ disjuncte open omgevingen van C_i, en zoals eerder volgt dat $\phi(U_i') \subset X/A$ open, disjunct en $\phi(U_i') \supset C_i$. (b) Stel $p \in C_1, p \notin C_2$. (Het andere geval werkt natuurlijk op dezelfde manier.) Defineer $K_i = \phi^{-1}(C_i) \subset X$. Deze zijn disjunct en afgesloten (want ϕ is per constructie continu). Merk op dat $K_1 \supset A$. X is T_4, er zijn dus $U_1, U_2 \subset X$ disjunct en afgesloten zodanig dat $K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$. Het is duidelijk dat $\phi(U_i) \supset C_i$. We beweren dat $\phi(U_1), \phi(U_2)$ open en disjunct zijn: Per constructie, $U_2 \subset X - U_1 \subset X - K_1 \subset X - A$. Dus de afbeelding ϕ identifieert geen punt van U_2 met een ander punt van X, en uit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ volgt $\phi(U_1) \cap \phi(U_2) = \emptyset$. Uit $U_2 \subset X - A$ volgt ook $\phi^{-1}(\phi(U_2)) = U_2$ en uit $U_1 \supset A$ volgt $\phi^{-1}(\phi(U_1)) = U_1$, dus $\phi(U_1), \phi(U_2)$ zijn open.

Oplossing 4 (i) $f : I \to S^n$ is niet surjectief, dus er is een punt $p \in S^n$ zodanig dat $f(I) \subset S^n - \{p\}$. Maar $S^n - \{p\}$ is homeomorf met $\mathbb{R}^n$. We mogen dus f als lus in $\mathbb{R}^n$ beschouwen, en die is homotop met een constante lus omdat $\mathbb{R}^n$ contraheerbaar.

(ii) Zij $\mathcal{H}$ de verzameling van open hemispheren in S^n. Voor elk $H \in \mathcal{H}$ geldt $H \subset S^n$ open, dus $I_H := f^{-1}(H) \subset I$ is open. Dus: $\{I_H \mid H \in \mathcal{H}\}$ is een open overdekking van het (compacte) interval I. Er zijn dus eindig veel hemispheren $H_1, \ldots, H_s \in \mathcal{H}$ zodanig dat $\{I_{H_1}, \ldots, I_{H_s}\}$ een overdekking van I is. Het overdekkings-Lemma van Lebesgue zegd nu dat er een $\delta > 0$ is zodanig dat elk interval $J \subset I$ van lengte $< \delta$ in een van de intervallen $I_{H_i},\ i \in \{i, \ldots, s\}$ ligd. De bewering volgt dus als we $m > 1/\delta$ kiezen.