Tentamen Topologie, Najaar 2008

26.1.2009

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve het boek van Runde.
- Als je stellingen uit het boek gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de andere delen wel te maken!!
- In het totaal zijn 30 punten (+ 5 bonuspunten) te bereiken. ≥ 17 punten is voldoende.

Opgave 1 (5 pt) *Zij X compacte topologische ruimte en $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ afgesloten verzamelingen met $C_i \neq \emptyset$ $\forall i$. Bewijs alleen de definitie van compactheit gebruikend dat $\cap_i C_i \neq \emptyset$.*

Opgave 2 (Locaal compacte ruimtes, 10 pt) *Zij X een topologische ruimte en $f : X \to \mathbb{C}$. We schrijven $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ en zeggen dat "f bij oneindig naar nul gaat" als voor elk $\varepsilon > 0$ een compact $K \subset X$ bestaat zodanig dat $x \in X - K \;\Rightarrow\; |f(x)| < \varepsilon$. We defineren*

$$C_0(X, \mathbb{C}) = \{f \in C(X, \mathbb{C}) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}.$$

(a) *[2 pt] Laat zien: X is compact $\Leftrightarrow$ $C_0(X, \mathbb{C})$ bevat een constante functie $\neq 0$.*

(b) *[3 pt] Zij X locaal compact Hausdorff en $f : X \to \mathbb{C}$ willekeurig. Zij $\widehat{f}$ de uitbreiding van f naar de een-punts compactificatie (of Alexandrov compactificatie) $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ gedefineerd door*

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ 0 & x = \infty \end{cases}$$

Laat zien dat $\widehat{f} \in C(X_\infty, \mathbb{C})$ (dus $\widehat{f}$ is continu) $\Leftrightarrow$ $f \in C_0(X, \mathbb{C})$.

(c) *[5 pt] Een top. ruimte X heeft de* **Baire eigenschap** *als de intersectie $\cap_{i\in\mathbb{N}} U_i$ van aftelbaar veel dichte open deelverzamelingen $U_1, U_2, \ldots$ altijd dicht in X is. (Tijdens het hoorcollege hebben we gezien dat volledige metrische ruimtes de Baire eigenschap hebben.)*

Gebruik opgave 1 om te bewijzen dat elke locaal compacte Hausdorff ruimte de Baire eigenschap heeft.

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 ("Partities van de eenheid", 5 pt) *Zij X een normale topologische ruimte (i.e. T_4) en twee (eindige!) open overdekkingen $\{U_1, \ldots, U_n\}$, $\{V_1, \ldots, V_n\}$ waar $\overline{V_i} \subset U_i \; \forall i$.*

Construeer functies $f_i \in C(X, [0,1])$, $i = 1, \ldots, n$ zodat

$$\operatorname{supp} f_i \equiv \overline{\{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}} \subset U_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

en

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1 \quad \forall x \in X.$$

Bonus (5pt) *: Gegeven alleen één eindige open overdekking $\{U_1, \ldots, U_n\}$ van een normale ruimte, construeer een twede $\{V_1, \ldots, V_n\}$ zodat $\overline{V_i} \subset U_i \; \forall i$.*

Opgave 4 ("Hoofdstelling van de algebra', 10 pt) *Geef een topologisch bewijs voor het feit dat elke niet-constante veelterm $P \in \mathbb{C}[x]$ een nulpunt heeft, zoals volgt:*

We identificeren S^1 met $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Gegeven zij een veelterm $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ van grad $n \geq 1$ zonder nulpunten. We mogen veronderstellen dat $a_n = 1$.

(a) *[2 pt] Voor $R \geq 0$ defineer*

$$f_R : S^1 \to S^1, \quad z \mapsto \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}.$$

Concludeer dat $f_1 : S^1 \to S^1$ homotoop is met een constante afbeelding.

(b) *[3 pt] Defineer $g : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ door*

$$g(z,t) = \begin{cases} f_{1/t}(z) & t \in (0,1] \\ z^n & t = 0 \end{cases}$$

Bewijs dat g een homotopie is tussen f_1 en de afbeelding $z \mapsto z^n$.

(c) *[3 pt] De afbeelding $h_n : z \mapsto z^n$ kunnen we als een lus in S^1 met begin en eindpunt 1 bekijken. Gebuik de overdekkingsafbeelding $p : \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ om te bewijzen dat h_n niet homotop aan een constante afbeelding is, als $n \neq 0$.*

(d) *[2 pt] Hoe volgt de hoofdstelling van de algebra uit (a)-(c)?*

Oplossingen

Oplossing 1 Stel $\cap_i C_i = \emptyset$. Dit is equivalent aan $\cup_i(X - C_i) = X$, dus $\{X - C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ is een open overdekking van X. Gezien X compact is, is er een $S \subset \mathbb{N}$ eindig zodat $\cup_{i\in S}(X - C_i) = X$. Dus $\cap_{i\in S} C_i = \emptyset$. Uit $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ volgt $\cap_{i\in S} C_i = C_n$ met $n = \max(S)$. Dus $C_n = \emptyset$, en dit is een tegenspraak met de aanname $C_i \neq \emptyset\ \forall i$. Dus $\cap_i C_i \neq \emptyset$. ■

Oplossing 2 (a) Zij X compact en $f = \text{const}$. Om te zien dat $f \in C_0(X, \mathbb{C})$ moeten we voor elk $\varepsilon > 0$ een compact $K_\varepsilon \subset X$ vinden zodat $|f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in X - K_\varepsilon$. Gezien X compact is mogen we $K_\varepsilon = X\ \forall\varepsilon$ kiezen en zijn klaar. Stel omgekeerd dat de constante functie $f = 1$ in $C_0(X, \mathbb{C})$ is. Voor $\varepsilon \in (0, 1)$ geldt dat $\{x \in X \mid |f(x)| < \varepsilon\}$ leeg is, maar gezien $1 \in C_0(X, \mathbb{C})$ moet het complement van deze verzameling compact zijn. Dus X is compact.

(b) $X \subset X_\infty$ is open en $\mathcal{T}_\infty \restriction X = \mathcal{T}$, dus $\widehat{f}$ is continu in $x \in X \ \Leftrightarrow\ f$ is continu in x. Uit $\widehat{f}(\infty) = 0$ volgt dat $\widehat{f}$ continu in ∞ is als er voor elk $\varepsilon > 0$ een omgeving U van ∞ is zodanig dat $|f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in U$. Gezien de definitie van de topologie op X_∞ zijn deze omgevingen $U \ni \infty$ precies de verzamelingen $(X - K) \cup \{\infty\}$, waar $K \subset X$ compact. Hiermee volgt de bewering.

(c) We moeten bewijzen dat

$$U \cap U_1 \cap U_2 \ldots \neq \emptyset$$

voor elke niet-lege open verzameling U. De locale compactheid van X impliciert (opgave 2 op blz. 115) de existentie van een niet-lege open verzameling V_0 met $\overline{V_0}$ compact en $\overline{V_0} \subset U$. Omdat de U_i dicht en open zijn bestaan niet-lege open verzamelingen $V_1, V_2, \ldots$ zodat $\overline{V_{i+1}} \subset V_i \cap U_{i+1}$. Dan geldt $\overline{V_0} \supset \overline{V_1} \supset \cdots$, waar alle verzamelingen niet leeg zijn. Opgave 1 impliciert $\cap_i \overline{V_i} \neq \emptyset$. Maar per constructie geldt ook $\cap_i \overline{V_i} \subset U \cap U_1 \cap U_2 \cap \cdots$, en daarmee zijn we klaar.

Oplossing 3 We hebben $\overline{V_i} \subset U_i$, dus $\overline{V_i}$ en $X - U_i$ zijn disjuncte afgesloten verzamelingen. Met het Lemma van Urysohn vinden we functies $g_i : X \to [0, 1]$ zodanig dat $g_i \restriction \overline{V_i} = 1$ en $g_i \restriction (X - U_i) = 0$. Dus $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$. Zij nu $g(x) = \sum_i g_i(x)$. Met het feit dat $\{V_i\}$ een overdekking van X is volgt $g(x) \geq 1\ \forall x \in X$. Defineer $f_i(x) = g_i(x)/g(x)$. Nu geldt (i) $f_i \geq 0$, (ii) $f_i(x) \leq 1$ (want $g_i \leq g$) en (iii) $\sum_i f_i = (\sum_i g_i)/g = g/g = 1$. ■

Bonus: Zie beneden.

Oplossing 4 (a) De continuiteit van P en het feit dat P geen nulpunten heeft impliceren dat de afbeelding $\mathbb{C} \to S^1,\ z \mapsto P(z)/|P(z)|$ continu is, dus ook de afbeelding $(R, z) \mapsto f_R(z)$. Deze is dan een homotopie tussen f_1 en de constante afbeelding $f_0 : z \mapsto P(0)/|P(0)|$.

(b) Voor $t \in (0, 1]$ hebben we

$$\begin{aligned} g(z,t) = \frac{P(z/t)}{|P(z,t)|} &= \frac{t^{-n}z^n + t^{-(n-1)}a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + t^{-1}a_1 z + a_0}{|t^{-n}z^n + t^{-(n-1)}a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + t^{-1}a_1 z + a_0|} \\ &= \frac{z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \cdots + t^{n-1}a_1 z + t^n a_0}{|z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \cdots + t^{n-1}a_1 z + t^n a_0|}. \end{aligned}$$

Natuurlijk is er een M zodanig dat $|a_i| \leq M\ \forall i$. Samen met het feit dat $z \in S^1$ zien we makkelijk dat $g(z, t)$ uniform naar $z^n/|z^n| = z^n$ convergeert als $t \to 0$. Hieruit volgt dat $g : S^1 \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ continu is, en dus een homotopie tussen $z \mapsto g(z, 1) = f_1(z)$ en $z \mapsto z^n$.

(c) De afbeelding $h_n : z \mapsto z^n$ is een lus in S^1 met begin en eindpunt 1. We schrijven deze als $\gamma : [0, 1] \to S^1,\ t \mapsto e^{2\pi i n t}$. Gezien $p : \mathbb{R} \to S^1$ een overdekkingsafbeelding is en $p(0) = 1$, is er een unieke pad $\widehat{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ zodanig dat $p \circ \widehat{\gamma} = \gamma$ en $\widehat{\gamma}(0) = 0$, cf. Lemma 5.2.3. Het is duidelijk dat $\widehat{\gamma}(t) = nt$ hieraan voldoet, en dit is de enige oplossing. Als h_n homotoop aan een constante afbeelding was dan zou volgen (Coro. 5.2.5) dat $\widehat{\gamma}(1) = 0$, maar dit geldt alleen als $n = 0$.

(d) Als een veelterm P van grad $n \geq 1$ bestaat zonder nulpunten, dan volgt uit (a) en (b) dat $h_n : S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^n$ homotoop is met een constante afbeelding, maar kan niet gezien (c). ■

Oplossing 5 (Bonusopgave) Eerste poging: We defineren, voor $1 \leq i \leq n$, de afgesloten verzameling

$$F_i = X - \bigcup_{j \neq i} U_j.$$

Omdat $\{U_1, \ldots, U_n\}$ een overdekking van X is geldt $U_i \cup \bigcup_{j \neq i} U_j = X$, en dus $F_i \subset U_i$. Gezien de normaliteit van X en Lemma 4.1.1 is er dus een open V_i zodanig dat $F_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$. We doen dit voor elk $i \in \{1, \ldots, n\}$. Als het lukt om te bewijzen dat $\cup_i V_i = X$ is dus $\{V_1, \ldots, V_n\}$ een open overdekking met de gewensde eigenschap $\overline{V_i} \subset U_i\ \forall i$ en we zijn klaar. Helaas werkt dit niet: Gezien we weinig over de V_i weten bestaat de enige hoop om $\cup_i V_i = X$ te bewijzen in het bewijzen van $\cup_i F_i = X$. Maar stel er is een $x \in X$ zodanig dat $x \in U_i\ \forall i$. (Voorbeelden hiervoor zijn makkelijk te vinden.) Dan geldt $x \notin F_i\ \forall i$ en dus $x \notin \cup_i F_i$.

Maar er is een slimmere aanpak (gevonden door Jins de Jong) die wel werkt: Zoals boven gebruiken we Lemma 4.1.1 om een open verzameling V_1 te vinden waarvoor geldt

$$X - \bigcup_{j \neq 1} U_j \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1.$$

We merken op dat $\{V_1, U_2, U_3, \ldots, U_n\}$ weer een open overdekking van X is. Daarom is er (Lemma 4.1.1) een open V_2 zodanig dat

$$X - \bigcup \{V_1, U_3, U_4, \ldots, U_n\} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset U_2.$$

Nu is $\{V_1, V_2, U_3, U_4, \ldots, U_n\}$ een open overdekking. We kiezen dus <u>achter elkaar</u> open verzamelingen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ zodanig dat

$$X - \bigcup \{V_1, \ldots, V_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_n\} \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i.$$

Voor alle k geldt dat $\{V_1, \ldots, V_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ een open overdekking van X is, dus in het bijzonder $\{V_1, \ldots, V_n\}$. Gezien per constructie geldt dat $\overline{V_i} \subset U_i$, zijn we klaar. ■

Opmerking: De bewering in de bonusopgave geldt ook voor oneindige overdekkingen (mits deze "puntsgewijs eindig" zijn, dus $\{i \in I \mid x \in U_i\}$ is eindig voor alle $x \in X$). Een manier om dit te bewijzen zou kunnen zijn door de index verzameling I van een welordening te voorzien (dat dit kan volgt uit het keuzeaxioma) en "transfiniete inductie" te gebruiken. Deze aanpak wordt tegenwordig als ouderwets beschouwd een de voorkeur is voor bewijzen die het Lemma van Zorn gebruiken. Zo een bewijs (uit het boek van Engelking) staat op de website.