Hertentamen Topologie, Najaar 2009

06.05.2010

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve het boek van Runde en het aanvullende dictaat.
- Als je stellingen uit het boek gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de andere delen wel te maken!!
- In het totaal zijn 38 (+10) punten te bereiken. ≥ 20 punten is zeker voldoende.

Opgave 1 (10 pt) Zij $\mathcal{B} \subset P(\mathbb{R})$ gegeven door

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \mid -\infty < a < b < \infty\} \bigcup \{\mathbb{Q} \cap (a,b) \mid -\infty < a < b < \infty\}.$$

Bewijs de volgende beweringen:

(i) $\mathcal{B}$ is een basis voor een topologie τ' op $\mathbb{R}$.

(ii) $(\mathbb{R}, \tau')$ is Hausdorff.

(iii) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ is afgesloten in $(\mathbb{R}, \tau')$.

(iv) $(\mathbb{R}, \tau')$ is niet regulier (T_3).

(v) Als $f : (\mathbb{R}, \tau') \to \mathbb{R}$ continu is en $f = 0$ op $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dan is $f \equiv 0$.

Opgave 2 (9 pt) Zij $X = \{(x,y) \mid y \geq 0,\ (x,y) \neq (0,0)\}$ het afgesloten bovenhalfvlak zonder $(0,0)$ met de topologie die van $X \subset \mathbb{R}^2$ komt.

(i) Bewijs dat $E = \{(x,0) \mid x < 0\}$ en $F = \{(x,0) \mid x > 0\}$ afgesloten deelverzamelingen van X zijn.

(ii) Construeer een expliciete continue functie $f : X \to [0,1]$ met $f \restriction E = 1$ en $f \restriction F = 0$.

(iii) Is X normaal (T_4)? (Met bewijs.)

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 (10 pt) Zij $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(i) Laat zien dat X pad-samenhangend is.

(ii) Laat zien dat $p : \mathbb{C} \to X, \quad x \mapsto e^x$ een overdekkingsafbeelding is.

(iii) Gebruik (ii) om $\pi_1(X, x_0)$ te bepalen ($x_0 \in X$). Hint: Gebruik een stelling in Runde.

(iv) Geef (incl. bewijs) een homeomorfisme tussen X en $X_1 \times X_2$ waar X_1, X_2 bekende fundamentaalgroep hebben.

(v) Gebruik (iv) om $\pi_1(X, x_0)$ nog eens te berekenen.

Opgave 4 (9 pt) Zij (X, τ) locaal compact en Hausdorff. Bewijs de volgende beweringen:

(i) Als $U \subset X$ open is dan is U locaal compact (met de relatieve topologie).

(ii) Als $C \subset X$ afgesloten is dan is C locaal compact (met de relatieve topologie).

(iii) Als $U \subset X$ open is en $C \subset X$ afgesloten dan is $U \cap C$ locaal compact.

Opgave 5 (BONUS, 10 pt) (i) Zij (X, τ) topologische ruimte en $(Y, \tau \restriction Y)$ deelruimte van X. Zij $Z \subset Y$. Bewijs: De afsluiting $\mathrm{Cl}_Y(Z)$ van Z in Y is gelijk aan $Y \cap \overline{Z}$. (Hier $\overline{Z} = \mathrm{Cl}_X(Z)$ is de afsluiting van Z in X.)

(ii) (Moeilijk!) Bewijs: Als X Hausdorff is en $Y \subset X$ locaal compact, dan is Y een open deelverzameling van de deelruimte $(\overline{Y}, \tau \restriction \overline{Y})$. Hint: Gebruik (i).

(iii) Gebruik (ii) om te concluderen: Als X Hausdorff is en $Y \subset X$ locaal compact, dan zijn er $U \subset X$ open en $C \subset X$ afgesloten zodat $Y = U \cap C$.

Oplossingen

Oplossing 1 (i) De verzameling van willekeurige verenigingen van elementen van $\mathcal{B}$ is een topologie τ' dan en slechts dan elke doorsnede $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ zich als vereniging van elementen van $\mathcal{B}$ laat schrijven. In ons geval geldt selfs dat $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ is: De doorsnede van twee open intervallen is leeg of weer een open interval.

(ii) Per definitie is duidelijk dat $\tau' \supset \tau$, waar τ de gewone topologie op $\mathbb{R}$ is. Gezien τ Hausdorff is geldt dit ook voor τ'. (Voor $x \neq y$ zijn er disjuncte open $U, V \in \tau$ met $x \in U, y \in V$. Maar U, V zijn ook in τ'.)

(iii) We hebben $\mathbb{Q} = \bigcup_{a<b} \mathbb{Q} \cap (a, b)$. Gezien de verzamelingen rechts alle in $\mathcal{B}$ zijn volgt $\mathbb{Q} \in \tau'$. Dus $\mathbb{Q}$ is τ'-open en $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ is τ'-afgesloten.

(iv) Volgens (iii) is $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ afgesloten. Volgens (ii) is τ' Hausdorff, dus $\{0\}$ afgesloten. Stel $U, V \in \tau'$ zijn disjunct met $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subset U$ en $0 \in V$. Gezien $\mathcal{B}$ een basis voor τ' is, moet er een $B \in \mathcal{B}$ zijn met $0 \in B \subset V$, waaruit volgt dat er $a < 0 < b$ zijn zodat $(a, b) \cap \mathbb{Q} \subset V$. Kies $z \in (a, b) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset U$. Weer omdat $\mathcal{B}$ een basis is moet er een $B' \in \mathcal{B}$ zijn met $z \in B' \subset U$. Gezien z irrationeel is moet B' van de vorm (c, d) zijn voor zekere $c < z < d$. Dus $U \cap V \supset (a, b) \cap (c, d) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Tegenspraak!

(v) Zij $f \in C((\mathbb{R}, \tau'), \mathbb{R})$ zodanig dat $f \restriction \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \equiv 0$. We moeten bewijzen dat $f \restriction \mathbb{Q} \equiv 0$. Stel $x \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $f(x) \neq 0$. We mogen veronderstellen dat $f(x) = 1$. Dan is er een τ'-open $U \ni x$ zodat $f(y) > 3/4$ voor alle $y \in U$. Zoals in (iii) zien we dat er een $B \in \mathcal{B}$ is met $B \subset U$. Er zijn dus $a < x < b$ zodat $f(y) > 3/4$ voor alle $y \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Kies een irrationeel $z \in (a, b)$. Per aanname geldt $f(z) = 0$. Met continuiteit van f is er een $B' \in \mathcal{B}$ met $z \in B'$ zodat $|f| < 1/4$ op B'. Gezien z irrationeel is moet B van de vorm (c, d) met $c < z < d$ zijn. Maar dan volgt dat $|f| < 1/4$ en $f > 3/4$ op de niet-lege verzameling $(c, d) \cap (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Dit is niet mogelijk, dus er is geen $x \in \mathbb{Q}$ met $f(x) \neq 0$.

Oplossing 2 (i) We hebben $X\backslash E = \{(x, y) \mid y > 0\} \cup \{(x, y) \mid x > 0\}$. Allebei de verzamelingen rechts zijn open in $\mathbb{R}^2$ en daarom is $X\backslash E$ open in X, dus $E \subset X$ afgesloten. Hetzelfde geldt voor F.

(ii) We gebruiken poolcoördinaten: De continue afbeelding $(0, \infty) \times [0, \pi] \to X,\ (r, \phi) \mapsto (x, y) = r(\cos\phi, \sin\phi)$ heeft $(x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, \phi(x, y))$ als continue inverse afbeeling en is dus een homeomorphisme. Hier is $\phi(x, y) = \arctan \frac{y}{x} \in [0, \pi]$ de hoek tussen de lijn $\overline{(0, 0)(x, y)}$ en de positieve x-as. Dan is $f : X \to [0, 1], (x, y) \mapsto \phi(x, y)/\pi$ gelijk aan 0 op F en 1 op E, zoals gewensd.

(iii) Ja! $\mathbb{R}^2$ is een metrische ruimte, dus $X \subset \mathbb{R}^2$ is metrisch (Runde, Example 2.1.2(b)), dus normaal (Runde, Example 3.5.11(a)).

Oplossing 3 (i) Zij $x_1, x_2 \in X$. Met poolcoördinaten hebben we $x_i = r_i e^{i\phi_i}$, waar $r_1, r_2 > 0$. Met

$$x(t) = (r_1 + t(r_2 - r_1))e^{i(\phi_1 + t(\phi_2 - \phi_1))}$$

geldt $x(0) = x_1,\ x(1) = x_2$ en $x(t) \in X$ voor alle $t \in [0, 1]$. Het is duidelijk dat $t \mapsto x(t)$ continu is.

(ii) $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ is enkelvoudig samenhangend. De afbeelding p is surjectief, en als $x \in X$ en $z \in p^{-1}(x)$, dan is $p^{-1}(x) = z + 2\pi i\mathbb{Z}$. Verder kunnen we een open schijf $U \subset X$ met midpunt x en $0 \notin U$ vinden. Als we U klein genoeg kiezen geldt

$$p^{-1}(U) = V + 2\pi i\mathbb{Z}$$

voor een open $V \subset \mathbb{C}$, waar $V \cap (V + 2\pi i n) = \emptyset$ voor alle $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Dan is de beperking $p : V + 2\pi i n \to U$ een homeomorfisme, dus p is een overdekking.

(iii) $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ is enkelvoudig samenhangend. We hebben gezien dat $p^{-1}(x) \cong \mathbb{Z}$ voor elk $x \in X$. Stelling 5.2.6 in Runde geeft dus een bijectie tussen $\pi_1(X, x_0)$ en $\mathbb{Z}$. (Dit is in feite een isomorfisme van groepen. Welk $x_0 \in X$ we kiezen maakt niet uit gezien X pad-samenhangend is.)

(iv) Poolcoördinaten geven een homeomorfisme tussen $X = \mathbb{C}$ en $(0, \infty) \times S^1$ (met $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$):

$$\alpha : z \mapsto \left(|z|, \frac{z}{|z|}\right), \qquad \alpha^{-1} : (r, z) \mapsto rz.$$

Nu weten we dat $(0, \infty)$ samentrekbaar is, dus $\pi_1((0, \infty)) = \{e\}$, terwijl $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

(v) Met het resultaat van opgave 5.1.5 in Runde volgt $\pi_1(X) \cong \{e\} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

Oplossing 4 (i) Zij X locaal compact Hausdorff, $U \subset X$ open en $x \in U$. Dan weten we (zij het dat we de sterke definitie van locale compactheid gebruiken of als gevolg van een resultaat dat op het college bewezen is) dat er een compact $K \subset U$ bestaat met $x \in K$. Met de definitie van de deelruimte topologie is duidelijk dat K ook als deelruimte van U compact is. Dus: U is locaal compact.

(ii) Zij $C \subset X$ afgesloten en $x \in C$. Gezien X locaal compact is is er een compact $K \subset X$ met $x \in K$. Gezien X Hausdorff is is K afgesloten. Daarom is $K \cap C$ compact in X en (met hetzelfde argument als boven) compact in (C, τ_C). Dus: C is locaal compact.

(iii) Met (i) volgt dat (U, τ_U) locaal compact is. Omdat $X \backslash C \subset X$ open is, is ook $U \cap (X \backslash C) = U \backslash (C \cap U)$ open (in U) en dus $C \cap U$ afgesloten in U. Daarom volgt met (ii) dat $C \cap U$ locaal compact is.

Oplossing 5 (i) Per definitie is $\mathrm{Cl}_Y(Z)$ de doorsnede van alle afgesloten deelverzamelingen $C \subset Y$ met $Z \subset C$. En elk afgesloten $C \subset Y$ is van de vorm $\hat{C} \cap Y$ met $\hat{C} \subset X$ afgesloten. Dus

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_Y(Z) &= \bigcap\{C \mid C \subset Y \text{ afgesloten}, Z \subset C\} \\
&= \bigcap\{\hat{C} \cap Y \mid \hat{C} \subset X \text{ afgesloten}, Z \subset \hat{C}\} \\
&= Y \cap \bigcap\{\hat{C} \mid \hat{C} \subset X \text{ afgesloten}, Z \subset \hat{C}\} \\
&= Y \cap \mathrm{Cl}_X(Z) = Y \cap \overline{Z}.
\end{aligned}$$

(ii) Zij $y \in Y$. Gezien Y locaal compact is, is er een open omgeving U van y in $(Y, \tau \restriction Y)$ zodat $\mathrm{Cl}_Y(U)$ compact is. Gezien de definitie van $\tau \restriction Y$ is er een open $V \subset X$ zodat $U = Y \cap V$. Dan geldt

$$\overline{Y \cap V} \cap Y = \overline{U} \cap Y = \mathrm{Cl}_Y(U),$$

waar de laatste identiteit uit (i) volgt. Gezien $\mathrm{Cl}_Y(U)$ compact is en X Hausdorff, is $\mathrm{Cl}_Y(U)$ en dus $\overline{Y \cap V} \cap Y$ afgesloten (in X). Maar $\overline{Y \cap V} \cap Y$ bevat $Y \cap V$ en dus ook $\overline{Y \cap V}$. Dus: $\overline{Y \cap V} \cap Y \supset \overline{Y \cap V}$. Hieruit volgt $\overline{Y \cap V} \subset Y$, en daarom ook $\overline{Y} \cap V \subset Y$. Gezien $V \subset X$ open is volgt dat $\overline{Y} \cap V$ een open omgeving van y in $\overline{Y}$ is. Gezien dit met elk $y \in Y$ werkt is $Y \subset \overline{Y}$ open.

(iii) Met (ii) is Y open in $C := \overline{Y}$. Er is dus een open $U \subset X$ zodat $Y = U \cap C$. Gezien $C \subset X$ afgesloten is zijn we klaar.

Opmerking bij Opgaves 4 en 5 We herhalen een paar bekende feiten:

1. Een afgesloten deelverzameling van een compacte ruimte is compact.

2. Een compacte deelverzameling van een Hausdorff ruimte is afgesloten.

3. Dus: Als X compact Hausdorff is en $Y \subset X$, dan is Y compact d.e.s.d.a. $Y \subset X$ is afgesloten.

4. Maar: Een open deelverzameling van een compacte ruimte hoeft niet compact te zijn. En een locaal compacte deelverzameling van een Hausdorff ruimte hoeft niet afgesloten te zijn. Voorbeeld voor beide beweringen: $(0, 1) \subset [0, 1]$.

Als X topologische ruimte is, noemen we een verzameling $Y \subset X$ 'locaal afgesloten' als $Y = U \cap C$ met $U \subset X$ open en $C \subset X$ afgesloten.

Hiermee kunnen we de resultaten van opgaven 4 en 5 als volgt formuleren:

- Opgave 4: Een locaal afgesloten deelverzameling van een locaal compacte ruimte is locaal compact.

- Opgave 5: Een locaal compacte deelverzameling van een Hausdorff ruimte is locaal afgesloten.

- Dus: Als X locaal compact Hausdorff is en $Y \subset X$ dan is Y locaal compact d.e.s.d.a. $Y \subset X$ is locaal afgesloten.