Tentamen Topologie, Najaar 2009

25.01.2010

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve het boek van Runde en het aanvullende dictaat.
- Als je stellingen uit het boek gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de andere delen wel te maken!!
- In het totaal zijn 40 punten te bereiken. ≥ 21 punten is zeker voldoende.

Opgave 1 (Niemytzki vlak, 8 pt) Zij $B_r(x,y) \subset \mathbb{R}^2$ de open bol met straal r rond (x,y). Defineer

$$\begin{aligned} L &= \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \\ Y &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \\ X &= Y \cup L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}. \end{aligned}$$

Voor $(x,y) \in X,\ r > 0$ defineer

$$U_{(x,y),r} = \begin{cases} B_r(x,y) \cap Y & \text{als} \quad y > 0 \\ B_r(x,r) \cup \{(x,0)\} & \text{als} \quad y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(i) Maak een tekening waar L, Y, X en $U_{(x,y),r}$ (met $y > 0$ en $y = 0$) duidelijk worden.

(ii) Laat zien dat $B = \{U_{(x,y),r} \mid (x,y) \in X,\ r > 0\}$ een basis voor een topologie $\widetilde{\tau}$ op X is.

(iii) Laat zien dat $\widetilde{\tau} \restriction Y$ de standaard topologie is, terwijl de deelruimte $(L, \widetilde{\tau} \restriction L)$ discreet is.

(iv) Laat zien dat $(X, \widetilde{\tau})$ aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet, maar niet aan het twede.

Bonus, 5 pt: Met (iii) volgt dat $A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\}$ en $B = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{Q}\}$ disjuncte afgesloten deelverzamelingen van $(X, \widetilde{\tau})$ zijn. Laat zien dat er geen $U, V \in \widetilde{\tau}$ zijn met $A \subset U,\ B \subset V,\ U \cap V = \emptyset$. (Dus $(X, \widetilde{\tau})$ is niet normaal.) Hint: Stelling van Baire.

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 2 (Compactheid van $X \times Y$, 12 pt) (i) Bewijs: Als $X \times Y$ compact is dan zijn X en Y compact.

(ii) Bekijk de productruimte $X \times Y$ waar Y compact is. Zij $U \subset X \times Y$ open zodat $\{x_0\} \times Y \subset U$ voor een zeker $x_0 \in X$. Bewijs: Er is een open $V \subset X$ zodat $x_0 \in V$ en $V \times Y \subset U$.

(iii) Bebruik (ii) om te bewijzen dat $X \times Y$ compact is als X, Y compact zijn. (Geen beroep op de stelling van Tychonov en geen gebruik van netten!)

Opgave 3 (Functies op locaal compacte ruimtes, 8 pt) Zij X locaal compacte Hausdorff ruimte en $C \subset X$ compact. Bewijs: Er is een functie $f \in C(X, [0,1])$ met $f \upharpoonright C = 1$ en $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$ compact.

Opgave 4 (Reelle projectieve ruimte, 12 pt) Zij $n \geq 1$. Defineer equivalentierelaties $\sim_1$ en $\sim_2$ op $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ door

$$\begin{aligned} x \sim_1 y \quad &\Leftrightarrow \quad x = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \\ x \sim_2 y \quad &\Leftrightarrow \quad x = \lambda y, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Nu defineren we de 'reëlle projectieve ruimte' RP^n als quotientenruimte:

$$RP^n = (\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim_1 .$$

(i) Laat zien dat RP^n een Hausdorff ruimte is.

(ii) Is de quotientenafbeelding $p_1 : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to RP^n$ een overdekkingsafbeelding? (Met bewijs!)

(iii) Bewijs: $(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim_2$ is homeomorph met S^n.

(iv) Bewijs: RP^n is homeomorph met $S^n / \sim_3$ voor een geschikte equivalentierelatie $\sim_3$, en de quotientenafbeelding $p_3 : S^n \to RP^n$ is een overdekkingsafbeelding.

(v) Bewijs: RP^n is compact en boogsamenhangend.

(vi) Bepaal $\pi_1(RP^n)$ voor $n \geq 2$. Hint: Runde, Theorem 5.2.6.

Oplossingen

Oplossing 1 (i) L is de x-as ($y = 0$), Y is het open bovenhalfvlak en X het afgesloten bovenhalfvlak. Voor $y > 0$ is $U_{(x,y),r}$ is de gedeelte van de bol $B_r(x, y)$ die in Y ligt (voor $r \le y$ geldt $B_r(x, y) \subset Y$) en bevat dus geen punten van L! Voor $y = 0$ is $U_{(x,y),r}$ de unike open bol van straal r in Y die L in het punt $(x, 0)$ tangeert, plus het punt $(x, 0)$.

(ii) Zij $\widetilde{\tau}$ gedefineerd als alle mogelijke verenigingen van verzamelingen $U_{(x,y),r}$ (inclusief de lege). We zien dat $\emptyset, X \in \widetilde{\tau}$. Natuurlijk is $\widetilde{\tau}$ afgesloten onder willekeurige verenigingen. Afgeslotenheid van $\widetilde{\tau}$ onder eindige doorsnedes volgt zodra we aantonen dat voor elk $(x'', y'') \in U_{(x,y),r} \cap U_{(x',y'),r'}$ een $r'' > 0$ bestaat waarmee $U_{(x'',y''),r''} \subset U_{(x,y),r} \cap U_{(x',y'),r'}$. Met de definitie (1) ziet men dat $U_{(x,y),r} \cap U_{(x',y'),r'} \neq \emptyset$ implicieert $Y \cap U_{(x,y),r} \cap U_{(x',y'),r'} \neq \emptyset$. Als $y'' \neq 0$ dan ligt (x'', y'') in deze open deelverzameling van Y en dus ook $U_{(x'',y''),r''}$ mits $r'' > 0$ klein genoeg. Als $y'' = 0$ dan is $(x'', y'') \in U_{(x,y),r} \cap U_{(x',y'),r'}$ allen mogelijk als $x = x' = x''$ en $y = y' = 0$. In dit geval werkt elk $r'' \le \min(r, r')$.

(iii) Zoals in (ii) gezien, is $\{U_{(x,y),r} \mid (x, y) \in X,\ r > 0\}$ een basis voor een topologie $\widetilde{\tau}$ op X. Daarom is $\{U_{(x,y),r} \cap Y \mid (x, y) \in X,\ r > 0\}$ een basis voor de deelruimtetopologie $\widetilde{\tau} \restriction Y$ op Y. Uit (1) volgt $U_{(x,y),r} \cap Y = B_r(x, y) \cap Y$ als $y > 0$ en $U_{(x,y),r} \cap Y = B_r(x, r)$ als $y = 0$. Dus $\{U_{(x,y),r} \cap Y \mid (x, y) \in X, r > 0\}$ is gelijk aan $\{B_r(x, y) \cap Y \mid (x, y) \in Y,\ r > 0\}$, wat een basis voor de standard topologie op Y is. Dus: $\widetilde{\tau} \restriction Y = \tau \restriction Y$.

Aan de andere kant, geldt

$$L \cap U_{(x,y),r} = L \cap \left\{ \begin{array}{ll} B_r(x, y) \cap Y & \text{als} \quad y > 0 \\ B_r(x, r) \cup \{(x, 0)\} & \text{als} \quad y = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{als} \quad y > 0 \\ \{(x, 0)\} & \text{als} \quad y = 0 \end{array} \right\}$$

Gezien $\{L \cap U_{(x,y),r}\}$ een basis voor $\widetilde{\tau} \restriction L$ is, zien we dat elk punt van L open is. Dus $(L, \widetilde{\tau} \restriction L)$ is discreet.

(iv) Een aftelbare omgevingsbasis voor $(x, y) \in X$ is gegeven door $\{U_{(x,y),\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Uit de definitie van $U_{(x,y),r}$ volgt dat $(x, 0) \notin U_{(x',y),r}$ als $x \neq x'$ of $y \neq 0$. Elke basis voor $\widetilde{\tau}$ moet dus overaftelbaar veel elementen hebben.

Oplossing 2 (i) De projectie $p_1 : X \times Y \to X$ is continu. Dus $X = p_1(X \times Y)$ is compact (als continu beeld van een compacte ruimte). Hetzelfde geldt voor X_2.

(ii) Per aanname geldt voor elk $y \in Y$ dat $x_0 \times y \in U$. Uit de definitie van de producttopologie volgt dat er open verzamelingen $V_y \subset X$ en $W_y \subset Y$ zijn zodat $x_0 \times y \in V_y \times W_y \subset U$. Uit $y \in W_y$ volgt dat $\{W_y \mid y \in Y\}$ een open overdekking van Y is. Y is compact, dus er zijn $y_1, \dots, y_n \in Y$ zodat $Y = W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n}$. Defineer $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n} \subset X$. Dit is een open omgeving van x_0. Verder geldt

$$V \times Y = (V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}) \times (W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n}) \subset (V_{y_1} \times W_{y_1}) \cup \dots \cup (V_{y_n} \times W_{y_n}) \subset U.$$

V heeft dus de gewensde eigenschappen.

(iii) Zij X, Y compact en $\{U_i \mid i \in I\}$ een open overdekking van $X \times Y$. Voor elk $x \in X$ is $\{x\} \times Y \subset X \times Y$ compact en heeft daarom een overdekking door eindig veel U_i's: $\{x\} \times Y \subset U_{i_{x,1}} \cup \dots \cup U_{x,i_{n_x}}$. Met (ii) vinden we een open $V_x \subset X$ zodanig dat $x \in V_x$ en $V_x \times Y \subset U_{i_{x,1}} \cup \dots \cup U_{x,i_{n_x}}$. Als we dit met elk $x \in X$ doen krijgen we een open overdekking $\{V_x \mid x \in X\}$ van X. Gezien X compact is zijn er $x_1, \dots, x_m$ zodat $X = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$. Dus $V_{x_1} \times Y \cup \dots \cup V_{x_m} \times Y = X \times Y$. Gezien elk $V_{x_i} \times Y$ door eindig veel U_i's overdekt wordt, heeft $\{U_i\}$ een eindige deeloverdekking. Dus $X \times Y$ is compact.

Oplossing 3 (Als $C = X$ is dan is X compact en we kunnen gewoon $f \equiv 1$ kiezen.) Gezien X locaal compact Hausdorff is, is de een-punts compactificering X_∞ compact en Hausdorff, dus normaal (T_4). De compactheid van C impliceert dat $C \subset X_\infty$ afgesloten is. Verder is $\{\infty\}$ afgesloten en disjunct van C. Nu kunnen we op (minstens) twee manieren verder:

(a) Gezien X normaal is zijn er disjuncte open verzamelingen $U, V \subset X_\infty$ zodat $C \subset U, \infty \in V$. Nu geldt ook $U \cap \overline{V} = \emptyset$, dus natuurlijk $C \cap \overline{V} = \emptyset$. Daarom bestaat met het Lemma van Urysohn een functie $g \in C(X_\infty, \mathbb{R})$ met $g \upharpoonright C = 1$, $g \upharpoonright \overline{V} = 0$. Nu geldt $\{x \in X_\infty \mid g(x) \neq 0\} \subset X_\infty \backslash \overline{V}$ en dus $\overline{\{x \in X_\infty \mid g(x) \neq 0\}} \subset X_\infty \backslash V$. Gezien $V \subset X_\infty$ en open omgeving van ∞ is volgt met de definitie van τ_∞ dat $X_\infty \backslash V = X \backslash V$ een compacte deelverzameling van X is. Daarom heeft de restrictie $f = g \upharpoonright X$ alle gewensde eigenschappen.

(b) Met het Lemma van Urysohn is er een functie $g \in C(X_\infty, [0,1])$ zodat $g \upharpoonright C = 1$ en $g(\infty) = 0$. Maar hieruit volgt niet dat $\mathrm{supp}(g) \subset X$ compact is! Kies daarom een functie $h \in C([0,1],[0,1])$ zodanig dat $h(1) = 1$ en $h \upharpoonright [0, \varepsilon) = 0$ voor een $\varepsilon > 0$. (Bijvoorbeeld $h(x) = \max(2x - 1, 0)$.) Defineer nu $f = h \circ g$. Nu is er een open omgeving $U \subset X_\infty$ van ∞ waarop $g(x) \leq \varepsilon$ en dus $f(x) = 0$. Dus: $\mathrm{supp}(f) \subset X_\infty \backslash U$, en met de definitie van de topologie τ_∞ is dit een compacte deelverzameling van X.

Oplossing 4 (i) Zij $x, y, \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ met $x \not\sim_1 y$. Dus x en y zijn lineair onafhankelijk. Dan zijn er disjuncte open verzamelingen $U, V \subset \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ zodat $x \in U, y \in V$ en U, V zijn stabiel onder vermenigvuldiging met $\lambda \neq 0$ (dus $x \in U, \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda x \in U$). Dan geldt $p_1^{-1}(p_1(U)) = U, p_1^{-1}(p_1(V)) = V$. Dus $p_1(U), p_1(V)$ zijn disjuncte open omgevingen van de $\sim_1$-equivalentieklassen $[x], [y]$.

(ii) De quotientenafbeelding is per constructie continu en surjectief en voldoet dus aan (b) in Definitie 5.2.1 in Runde. Maar p_1 voldoet niet aan de eis (c): Deze zou impliceren dat, gegeven $[x] \in RP^n$, het oerbeeld $p_1^{-1}([x])$ discreet is, terwijl $p_1^{-1}([x]) = \{\lambda x \mid \lambda \neq 0\}$ niet discreet is.

(iii) Zij $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de inclusieafbeelding. Defineer $f : S^n \to (\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\})/\sim_2$ door $f = p_2 \circ \iota$. Het is duidelijk dat f continu is. Gezien p_2 geen verschillende punten van S^n identificeert is f injectief. Ook is f surjectief, want elk $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ is van de vorm $\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}$, waar $x/\|x\| \in S^n$, en $p_2(x) = p_2(x/\|x\|)$. Gezien S^n compact is, $(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\})/\sim_2$ Hausdorff en f een continue bijectie, volgt dat f een homeomorfisme is.

(iv) Het is duidelijk dat elke $\sim_1$-equivalentieklasse $[x]_1$ een disjuncte vereniging van twee $\sim_2$-equivalentieklassen is: $[x]_1 = [x]_2 \cup [-x]_2$. Daarom is $RP^n = (\mathbb{R} \backslash \{0\})/\sim_1$ homeomorf met $((\mathbb{R} \backslash \{0\})/\sim_2)/\sim_3$ waar $x \sim_3 y \Leftrightarrow x = \pm y$. Voor elk $x \in S^n$ is er een open omgeving $U \subset S^n$ zodat $U \cap (-U) = \emptyset$. Dan is $V = p_3(U) \in RP^n$ een open omgeving van $[x] \in RP^n$ waarvoor geldt $p_3^{-1}(V) = U \cup -U$. Verder zijn $p_3 \upharpoonright U$ en $p_3 \upharpoonright -U$ homeomorfismes. Daarom is p_3 een overdekkingsafbeelding.

(v) S^n is compact en boogsamenhangend, en dus ook RP^n als beeld van S^n onder de continue afbeelding p_3. (Zie Runde, Proposition 3.3.8 en Proposition 3.4.5.)

(vi) We weten (hoorcollege) dat $\pi_1(S^n) = 0$ voor $n \geq 2$. Theorem 5.2.6 geeft dus een bijectie $\pi_1(RP^n, x) \cong p_3^{-1}(x)$ voor elk $x \in RP^n$. Nu geldt $\# p_3^{-1}(x) = 2$ voor alle $x \in RP^n$. Dus: $\pi_1(RP^n, x)$ is een groep met twee elementen, en daar is er maar een van, namelijk de cyclische groep C_2 (ofwel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ of $\mathbb{Z}_2$) met twee elementen.