Her-Tentamen Topologie, Najaar 2010

13.05.2011, 14:00-17:00, HG00.307

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve de boeken van Gamelin/Greene en Willard.
- Als je stellingen uit de boeken gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de andere delen wel te maken!!

Opgave 1 *Zij τ de standaard topologie op $\mathbb{R}$. Zij $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.*

(i) Bewijs dat er een topologie $\widetilde{\tau}$ op $\mathbb{R}$ is zodanig dat

- *De $\widetilde{\tau}$-omgevingen van $x \neq 0$ zijn dezelfden als de τ-omgevingen van x.*
- *De $\widetilde{\tau}$-omgevingen van $x = 0$ zijn de verzamelingen die*

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

bevatten voor een $\varepsilon > 0$.

(ii) Bewijs dat $\widetilde{\tau}$ fijner is dan τ.

(iii) Bewijs dat $\widetilde{\tau}$ Hausdorff is.

(iv) Bewijs dat $C = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ gesloten is t.o.v. $\widetilde{\tau}$, maar niet t.o.v. τ.

(v) Bewijs dat er geen $U, V \in \widetilde{\tau}$ zijn met $U \cap V = \emptyset$ en $0 \in U, C \subset V$. Dus $(\mathbb{R}, \widetilde{\tau})$ is niet regulier (T_3).

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 2 *Zij* X *een normale topologische ruimte en* $\{C_1, C_2, \ldots\}$ *een aftelbare familie van gesloten deelverzamelingen van* X*. Stel dat elk punt van* X *een omgeving* U *heeft zodanig dat* $U \cap C_i \neq \emptyset$ *voor maximaal een* C_i*. (Dus in het bijzonder geldt* $C_i \cap C_j = \emptyset$ *als* $i \neq j$*.)*

Bewijs dat er open verzamelingen $U_1, U_2, \ldots$ *zijn zodanig dat* $C_i \subset U_i$ *voor elk* i *en zodanig dat* $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ *als* $i \neq j$*.*

Hint: Urysohn en/of Tietze.

Opgave 3 *Zij* X, Y *topologische ruimtes en* $f : X \to Y$ *continu, gesloten en surjectief met* $f^{-1}(y) \subset X$ *compact voor elk* $y \in Y$*. Bewijs:*

(i) Als X *Hausdorff (*T_2*) is dan is* Y *Hausdorff.*

(ii) Als X *regulier (*T_3*) is dan is* Y T_3*.*

(iii) Als X *locaal compact is dan is* Y *locaal compact.*

Opgave 4 *Zij* X, Y *locaal compact Hausdorff en* $f : X \to Y$ *continu. Geef noodzakelijke en voldoende condities aan voor het bestaan van een continue functie* $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$*, waar* $\widehat{X}, \widehat{Y}$ *de een-punts compactificaties zijn, zodanig dat* $\widehat{f} \restriction X = f$*.*

Opgave 5 *Zij* $X, \widetilde{X}$ *topologische ruimtes en* $x_0 \in X$*. Stel dat* $\pi_1(X, x_0)$ *triviaal is,* $\widetilde{X}$ *padsamenhangend en* $p : \widetilde{X} \to X$ *een overdekkingsafbeelding. Bewijs dat* p *een homeomorfisme is.*