Tentamen Topologie, Najaar 2010

26.01.2011, 09:00-12:00, HG00.068

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve de boeken van Gamelin/Greene en Willard.
- Als je stellingen uit de boeken gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de andere delen wel te maken!!
- In het totaal zijn 40 punten en 6 bonuspunten te bereiken. ≥ 20 punten is zeker voldoende.

Opgave 1 (12 punten) *Zij* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *(dus* $0 \notin \mathbb{N}$ *!!). Voor* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ *definiëren we*

$$N_{a,b} = a + b\mathbb{Z} = \{a + bn \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}.$$

(i) Bewijs: $N_{a,b} = \{c \in \mathbb{Z} \mid c - a \equiv 0 \ (mod\ b)\} = \{c \in \mathbb{Z} \mid b \text{ deelt } c - a\}$.

(ii) Bewijs: Als $c \in N_{a,b}$ *dan* $N_{c,b} = N_{a,b}$.

(iii) Laat zien dat $\mathcal{B} = \{N_{a,b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\}$ *basis voor een topologie* τ *op* $\mathbb{Z}$ *is.*

(iv) Laat zien dat elk $U \in \tau$ *met* $U \neq \emptyset$ *oneindig is.*

(v) Bewijs: Elk $N_{a,b}$ *is open en gesloten.*

(vi) Zij $P = \{2, 3, 5, \ldots\}$ *de verzameling van priemgetallen. Bewijs:*

$$\mathbb{Z} \backslash \{1, -1\} = \bigcup_{p \in P} N_{0,p}.$$

(vii) Gebruik de bewezen feiten om te concluderen dat <u>*P oneindig*</u> *is.*

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 2 (10 punten) *Zij X een volledig reguliere ruimte (=completely regular, $=T_{3\frac{1}{2}}$), $K \subset X$ compact en $C \subset X$ gesloten, waar $K \cap C = \emptyset$.*

(i) Laat zien dat er functies $f_x \in C(X, [0,1])$ zijn met $f_x(x) = 1$ en $f_x = 0$ op C, waar $x \in K$.

(ii) Gebruik de functies f_x om een open overdekking van K te maken.

(iii) Gebruik compactheid om een functie $g \in C(X, [0, \infty))$ te maken met $g = 0$ op C en $g > \frac{1}{2}$ op K.

(iv) Modificeer g om een $\underline{f \in C(X, [0,1])}$ te krijgen met $\underline{f = 1 \text{ op } K \text{ en } f = 0 \text{ op } C}$.

LET OP: X hoeft niet normaal (T_4) te zijn!

Opgave 3 (8+6 punten) *Zij X topologische ruimte. Zij $C(x)$ de samenhangscomponent van x. Voor $x \in X$, definiëer de quasi-component $Q(x)$ door*

$$Q(x) = \bigcap \{C \subset X \mid C \text{ clopen}, \ x \in C\}.$$

(i) Bewijs: $Q(x) = \{y \in X \mid \ \nexists C \subset X \text{ clopen zodat } x \in C \not\ni y\}$.

(ii) Bewijs: $Q(x) \supset C(x)$ voor elk $x \in X$.

(iii) Bewijs: X is nul-dimensionaal d.e.s.d.a. $Q(x) = \{x\}$ voor elk $x \in X$.

(iv) Er is een stelling die zegt dat $Q(x) = C(x)$ $\forall x \in X$ als X compact en Hausdorffs is. Gebruik dit om te bewijzen dat voor een compacte Hausdorff ruimte X geldt: X is totaal niet-samenhangend $\Leftrightarrow$ X is nul-dimensionaal.

*(v) Zij X compact, $U \subset X$ open en C_i gesloten $\forall i \in I$ zodanig dat $\cap_{i \in I} C_i \subset U$.
Bewijs: Er is een eindige verzameling $J \subset I$ zodanig dat $\cap_{j \in J} C_j \subset U$.*

*(vi) (**BONUS**) Bewijs de onder (iv) genoemde stelling.*

Opgave 4 (10 punten) *(i) Zij X topologische ruimte en $x_0 \in X$. Zij Y de padsamenhangscomponent van x_0 en $\iota : Y \hookrightarrow X$ de inclusieafbeelding. Bewijs dat*

$$\iota_* : \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

een isomorfisme is.

(ii) Voor elk $n \geq 2$, bereken $\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \{x\}, x_0)$ waar $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x \neq x_0$.

(iii) Bewijs dat $\mathbb{R}^2$ niet homeomorf is aan $\mathbb{R}^n$ is als $n \geq 3$.