Hertentamen Topologie, Najaar 2011

03.05.2012, 14:00-17:00, HG00.068 (14:00-18:00, HG00.308)

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine, telefoon, etc.) gebruiken, behalve de boeken van Gamelin/Greene en Willard.
- Als je stellingen uit de boeken gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de andere delen wel te maken!!
- In het totaal zijn 44 punten te bereiken. ≥ 23 punten is zeker voldoende.

Opgave 1 (12pt) Zij $X = \mathbb{R}^2$ en zij

$$\mathcal{B} = \{[a,b) \times [c,d) \mid a < b,\ c < d\}.$$

(i) Laat zien dat $\mathcal{B}$ basis voor een topologie τ op X is.

(ii) Laat zien dat τ de gewone topologie op $\mathbb{R}^2$ bevat.

(iii) Laat zien dat (X, τ) separabel is.

(iv) Zij $Y = \{(x,y) \mid x + y = 0\} \subset X$. Laat zien dat de geïnduceerde topologie $\tau \restriction Y$ de discrete topologie is.

(v) Laat zien dat $(Y, \tau \restriction Y)$ niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

(vi) Conludeer uit (iv) dat (X, τ) niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

(vii) Laat zien dat (X, τ) niet metriseerbaar is.

(viii) Zij $Z = \{(x,y) \mid x = y\} \subset X$. Laat zien dat de geïnduceerde topologie $\tau_Z = \tau \restriction Z$ niet discreet is. Geef een basis voor τ_Z aan.

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 2 (8 pt) Zij X locaal compacte Hausdorff ruimte en $C \subset X$ compact. Bewijs: Er is een functie $f \in C(X, [0,1])$ met $f \restriction C = 1$ en $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$ compact.

Opgave 3 (12 pt) Voor en topologische ruimte X en $A \subset X$ definiëren we een equivalentie relatie $\sim$ op X door $x \sim y \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; (x \in A \wedge y \in A)$. Nu definiëren we $X/A := X/\sim$, voorzien van de quotiententopologie. Bewijs de volgende beweringen:

(i) Als $A \subset X$ gesloten en X regulier ($=T_3$) dan is X/A Hausdorff.

(ii) Als $A \subset X$ gesloten en X normaal ($=T_4$) dan is X/A normaal.

Opgave 4 (12 pt) Zij $n \geq 1$. Definiëer equivalentierelaties $\sim_1$ en $\sim_2$ op $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ door

$$\begin{aligned} x \sim_1 y \quad &\Leftrightarrow \quad x = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ x \sim_2 y \quad &\Leftrightarrow \quad x = \lambda y, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Nu definiëren we de 'reëlle projectieve ruimte' RP^n als de quotientenruimte:

$$RP^n = (\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/\sim_1 .$$

(i) Laat zien dat RP^n een Hausdorff ruimte is.

(ii) Is de quotientenafbeelding $p_1 : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to RP^n$ een overdekkingsafbeelding? (Met bewijs!)

(iii) Bewijs: $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/\sim_2$ is homeomorph met S^n.

(iv) Bewijs: RP^n is homeomorph met $S^n/\sim_3$ voor een geschikte equivalentierelatie $\sim_3$, en de quotientenafbeelding $p_3 : S^n \to RP^n$ is een overdekkingsafbeelding.

(v) Bewijs: RP^n is compact en boogsamenhangend.

(vi) Bepaal $\pi_1(RP^n)$ voor $n \geq 2$.

Oplossingen

Oplossing 1 (i) Het is duidelijk dat $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}^2$. De doorsnede van twee elementes $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ is of leeg of weer een element van $\mathcal{B}$. Dus $\mathcal{B}$ is een basis.

(ii) Zij $a < b,\ c < d$. Dan geldt: $(a, b) \times (c, d) = \cup_{u \in (a,b), v \in (c,d)} [u, b) \times [v, d) \in \tau$.

(iii) Bewering: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ is dicht in (X, τ). Stel $\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}^{\tau} \neq \mathbb{R}^2$. Dit is equivalent aan het bestaan van een $\emptyset \neq U \in \tau$ zodanig dat $U \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Maar dit kan niet omdat $B \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ voor elk $B \in \mathcal{B}$.

(iv) Zij $(x, -x) \in Y$. Dan is $[x, x + 1) \times [-x, -x + 1) \in \mathcal{B} \subset \tau$, en $Y \cap \mathcal{B} = \{(x, -x)\}$. Alle een-punts verzamelingen in Y zijn dus open, dus $(Y, \tau \restriction Y)$ is discreet.

(v) Elke basis voor de discrete topologie op Y moet alle een-punts verzamelingen bevatten. Gezien $Y \cong \mathbb{R}$ niet aftelbaar is bestaat geen aftelbare basis.

(vi) Als (X, τ) aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet, dan ook $(Y, \tau \restriction Y)$ voor elk $Y \subset X$. Uit (iv) volgt dus dat (X, τ) niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

(vii) Voor een metrische ruimte zijn separabiliteit en het tweede aftelbaarheidsaxioma equivalent. Gezien (X, τ) alleen aan een van deze twee eigenschappen voldoet kan X niet metriseerbaar zijn.

(viii) Een basis voor $(Z, \tau \restriction Z)$ is gegeven door $\mathcal{B}_Z = \{B \cap Z \mid B \in \mathcal{B}\}$. Men ziet direct dat $\mathcal{B}_Z = \{[a, b) \mid a < b\}$. Hierin zijn geen een-punts verzamelingen bevat.

Oplossing 2 (Als $C = X$ is dan is X compact en we kunnen gewoon $f \equiv 1$ kiezen.) Gezien X locaal compact Hausdorff is, is de een-punts compactificering X_∞ compact en Hausdorff, dus normaal (T_4). De compactheid van C impliceert dat $C \subset X_\infty$ gesloten is. Verder is $\{\infty\}$ gesloten en disjunct van C. Nu kunnen we op (minstens) twee manieren verder:

(a) Gezien X_∞ normaal is zijn er disjuncte open verzamelingen $U, V \subset X_\infty$ zodat $C \subset U, \infty \in V$. Nu geldt ook $U \cap \overline{V} = \emptyset$, dus natuurlijk $C \cap \overline{V} = \emptyset$. Daarom bestaat met het Lemma van Urysohn een functie $g \in C(X_\infty, \mathbb{R})$ met $g \restriction C = 1,\ g \restriction \overline{V} = 0$. Nu geldt $\{x \in X_\infty \mid g(x) \neq 0\} \subset X_\infty \backslash \overline{V}$ en dus $\overline{\{x \in X_\infty \mid g(x) \neq 0\}} \subset X_\infty \backslash V$. Gezien $V \subset X_\infty$ en open omgeving van ∞ is volgt met de definitie van τ_∞ dat $X_\infty \backslash V = X \backslash V$ een compacte deelverzameling van X is. Daarom heeft de restrictie $f = g \restriction X$ alle gewensde eigenschappen.

(b) Met het Lemma van Urysohn is er een functie $g \in C(X_\infty, [0, 1])$ zodat $g \restriction C = 1$ en $g(\infty) = 0$. Maar hieruit volgt niet dat $\mathrm{supp}(g) \subset X$ compact is! Kies daarom een functie $h \in C([0, 1], [0, 1])$ zodanig dat $h(1) = 1$ en $h \restriction [0, \varepsilon) = 0$ voor een $\varepsilon > 0$. (Bijvoorbeeld $h(x) = \max(2x - 1, 0)$.) Definiëer nu $f = h \circ g$. Nu is er een open omgeving $U \subset X_\infty$ van ∞ waarop $g(x) \leq \varepsilon$ en dus $f(x) = 0$. Dus: $\mathrm{supp}(f) \subset X_\infty \backslash U$, en met de definitie van de topologie τ_∞ is dit een compacte deelverzameling van X.

Oplossing 3 We kunnen en zullen X/A interpreteren als $(X - A) \cup \{p\}$, waar het punt p het beeld van $A \subset X$ onder de quotientenafbeelding $\phi : X \to X/A$ is. (Op $X - A$ is ϕ gewoon de identiteit.) In (i) en (ii) moeten we bewijzen dat X/A de T_1 eigenschap heeft, dus dat elke eenpunts-verzameling $\{x\} \in X/A$ gesloten is, ofwel $X/A - \{x\}$ open. Per definitie is $U \subset X/A$ open als $\phi^{-1}(U) \subset X$ open is. Dus $\phi^{-1}(X/A - \{x\}) = X - \phi^{-1}(x)$ moet open zijn, dus $\phi^{-1}(x)$ gesloten. Als $x = p$ dan geldt $\phi^{-1}(x) = A$, en dit is per aanname gesloten. Als $x \neq p$ dan is $\phi^{-1}(x) = \{x\}$, dus gesloten omdat X de T_1 eigenschap heeft. Dus X/A is T_1.

(i) Zij $x, y \in X/A, x \neq y$. Er zijn twee gevallen: (a) $x \neq p \neq y$ en (b) $x = p \neq y$ of andersom. In geval (a) geldt $x, y \in X - A$. X is T_3, dus Hausdorff. Er zijn dus $U, V \in \tau_X$ met $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$. [NB: Ons beroep op de Hausdorff eigenschap garandeerd niet dat $U \cap A = \emptyset = V \cap A$. Maar als beide intersecties niet-triviaal zijn, dan zijn $\phi(U)$ en $\phi(V)$ niet disjunct, want beide bevatten het punt p!!!] A is gesloten, dus $X - A$ is open, dus $U' =$

$U \cap (X - A)$ en $V' = V \cap (X - A)$ zijn open en disjunct. Gezien U', V' disjunct met A zijn geldt $\phi(U') \cap \phi(V') = \emptyset$. Ook geldt dat $\phi(U'), \phi(V') \in \tau_{X/A}$, want $\phi^{-1}(\phi(U')) = U', \phi^{-1}(\phi(V')) = V'$ zijn open. Dus: $\phi(U'), \phi(V')$ zijn disjuncte open verzamelingen in X/A die x respectivelijk y bevatten. (b) Stel $x = p, y \neq p$. Dan is $y \in X - A$ en omdat X T_3 is zijn er disjuncte open $U, V \subset X$ zodat $A \subset U, y \in V$. Uit het feit $A \subset U$ volgt dat de quotientenafbeelding alleen sommige punten van U met elkaar identifiert en niets met $V \subset X - U \subset X - A$ doet. Dus $\phi(U) \cap \phi(V) = \emptyset$. Verder geldt $\phi^{-1}(\phi(U)) = U$ (omdat $U \supset A$) en $\phi^{-1}(\phi(V)) = V$ (omdat $V \subset X - A$), dus $\phi(U), \phi(V) \subset X/A$ zijn open. Daarom zijn ze disjuncte open omgevingen van $x = p$ respectivelijk y, en X/A is T_2.

(ii) Stel dat $C_1, C_2 \subset X/A$ gesloten en disjunct. Er zijn weer twee mogelijkheden: (a) $p \notin C_1$ en $p \notin C_2$ of (b) $p \in C_1, p \notin C_2$ of andersom. In geval (a), geldt $C_1, C_2 \subset X - A$. X is T_4, er zijn dus $U_1, U_2 \subset X$ disjunct en open zodanig dat $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$. Dan zijn ook $U_i' = U_i \cap (X - A)$ disjuncte open omgevingen van C_i, en zoals eerder volgt dat $\phi(U_i') \subset X/A$ open, disjunct en $\phi(U_i') \supset C_i$. (b) Stel $p \in C_1, p \notin C_2$. (Het andere geval werkt natuurlijk op dezelfde manier.) Definiëer $K_i = \phi^{-1}(C_i) \subset X$. Deze zijn disjunct en gesloten (want ϕ is per constructie continu). Merk op dat $K_1 \supset A$. X is T_4, er zijn dus $U_1, U_2 \subset X$ disjunct en gesloten zodanig dat $K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$. Het is duidelijk dat $\phi(U_i) \supset C_i$. We beweren dat $\phi(U_1), \phi(U_2)$ open en disjunct zijn: Per constructie, $U_2 \subset X - U_1 \subset X - K_1 \subset X - A$. Dus de afbeelding ϕ identifieert geen punt van U_2 met een ander punt van X, en uit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ volgt $\phi(U_1) \cap \phi(U_2) = \emptyset$. Uit $U_2 \subset X - A$ volgt ook $\phi^{-1}(\phi(U_2)) = U_2$ en uit $U_1 \supset A$ volgt $\phi^{-1}(\phi(U_1)) = U_1$, dus $\phi(U_1), \phi(U_2)$ zijn open.

Oplossing 4 (i Zij $x, y, \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ met $x \not\sim_1 y$. Dus x en y zijn lineair onafhankelijk. Dan zijn er disjuncte open verzamelingen $U, V \subset \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ zodat $x \in U, y \in V$ en U, V zijn stabiel onder vermenigvuldiging met $\lambda \neq 0$ (dus $x \in U, \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda x \in U$). Dan geldt $p_1^{-1}(p_1(U)) = U, p_1^{-1}(p_1(V)) = V$. Dus $p_1(U), p_1(V)$ zijn disjuncte open omgevingen van de $\sim_1$-equivalentieklassen $[x], [y]$.

(ii) De quotientenafbeelding is per constructie continu en surjectief. Maar p_1 voldoet niet aan de eis (c): Deze zou impliceren dat, gegeven $[x] \in RP^n$, het oerbeeld $p_1^{-1}([x])$ discreet is, terwijl $p_1^{-1}([x]) = \{\lambda x \mid \lambda \neq 0\}$ niet discreet is.

(iii) Zij $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de inclusieafbeelding. Definiëer $f : S^n \to (\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim_2$ door $f = p_2 \circ \iota$. Het is duidelijk dat f continu is. Gezien p_2 geen verschillende punten van S^n identificeert is f injectief. Ook is f surjectief, want elk $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ is van de vorm $\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}$, waar $x/\|x\| \in S^n$, en $p_2(x) = p_2(x/\|x\|)$. Gezien S^n compact is, $(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim_2$ Hausdorff en f een continue bijectie, volgt dat f een homeomorfisme is.

(iv) Het is duidelijk dat elke $\sim_1$-equivalentieklasse $[x]_1$ een disjuncte vereniging van twee $\sim_2$-equivalentieklassen is: $[x]_1 = [x]_2 \cup [-x]_2$. Daarom is $RP^n = (\mathbb{R} \backslash \{0\}) / \sim_1$ homeomorf met $((\mathbb{R} \backslash \{0\}) / \sim_2) / \sim_3$ waar $x \sim_3 y \Leftrightarrow x = \pm y$. Voor elk $x \in S^n$ is er een open omgeving $U \subset S^n$ zodat $U \cap (-U) = \emptyset$. Dan is $V = p_3(U) \in RP^n$ een open omgeving van $[x] \in RP^n$ waarvoor geldt $p_3^{-1}(V) = U \cup -U$. Verder zijn $p_3 \restriction U$ en $p_3 \restriction -U$ homeomorfismes. Daarom is p_3 een overdekkingsafbeelding.

(v) S^n is compact en boogsamenhangend, en dus ook RP^n als beeld van S^n onder de continue afbeelding p_3.

(vi) We weten (hoorcollege) dat $\pi_1(S^n) = 0$ voor $n \geq 2$. Theorem 5.2.6 geeft dus een bijectie $\pi_1(RP^n, x) \cong p_3^{-1}(x)$ voor elk $x \in RP^n$. Nu geldt $\# p_3^{-1}(x) = 2$ voor alle $x \in RP^n$. Dus: $\pi_1(RP^n, x)$ is een groep met twee elementen, en daar is er maar een van, namelijk de cyclische groep C_2 (ofwel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ of $\mathbb{Z}_2$) met twee elementen.