Tentamen Topologie, Najaar 2011

27.01.2012, 08:30-11:30, LIN 8 (HG00.308)

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine, telefoon, etc.) gebruiken, behalve de boeken van Gamelin/Greene en Willard.
- Als je stellingen uit de boeken gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de andere delen wel te maken!!
- In het totaal zijn 46 punten te bereiken. ≥ 24 punten is zeker voldoende.

Opgave 1 (9 pt) (i) $\langle 6 \rangle$ Zij X, Y topologische ruimtes en $A \subset X,\ B \subset Y$. Bewijs:

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}, \qquad (A \times B)^0 = A^0 \times B^0, \qquad \partial(A \times B) = \partial A \times \overline{B} \cup \overline{A} \times \partial B.$$

(Hier is ∂A de rand van A.)

(ii) $\langle 3 \rangle$ Zij $X_i \neq \emptyset$ topologische ruimte voor elk $i \in I$. Zij $A_i \subset X_i$ gesloten voor elk i. Bewijs dat $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} X_i$ gesloten is.

Opgave 2 (8 pt) Zij X topologische ruimte. Definieer een relatie $\sim$ op X door te zeggen dat $x \sim y$ d.e.s.d.a. er een samenhangende deelverzameling $S \subset X$ is met $\{x, y\} \subset S$.

(i) $\langle 2 \rangle$ Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

(ii) $\langle 4 \rangle$ Bewijs dat de quotientenruimte $\pi_0(X) := X/\sim$ (voorzien van de quotiententopologie) totaal niet-samenhangend is.

(iii) $\langle 2 \rangle$ Bewijs dat de quotientenafbeelding $p : X \to \pi_0(X)$ een homeomorfisme is d.e.s.d.a. X totaal niet-samenhangend is.

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 (8 pt) Voor een topologische ruimte X, zij $\widehat{X}$ de een-punts compactificatie. Zij X, Y locaal compacte Hausdorff ruimtes.

(i) $\langle 2 \rangle$ Bewijs dat $X \times Y$ locaal compact Hausdorff is.

(ii) $\langle 6 \rangle$ Bewijs dat $\widehat{X \times Y}$ homeomorf is aan een quotientenruimte van $\widehat{X} \times \widehat{Y}$.

Hint: Ga uit van de voor de hand liggende afbeelding $p : \widehat{X} \times \widehat{Y} \to \widehat{X \times Y}$.

Opgave 4 (12 pt) We noemen een topologische T_1-ruimte X *perfect normaal* of T_6 als er, gegeven twee niet-lege discjunte gesloten verzamelingen $A, B \subset X$ een functie $f \in C(X, [0,1])$ is zodat $f^{-1}(0) = A$ en $f^{-1}(1) = B$.

(i) $\langle 2 \rangle$ Bewijs $T_6 \Rightarrow T_4$ (normaliteit). Waarom is T_6 (a priori) sterker dan T_4?

(ii) $\langle 2 \rangle$ Bewijs dat een T_1-ruimte T_6 is d.e.s.d.a. voor elk gesloten $A \subset X$ een functie $f_A \in C(X, [0, \infty))$ bestaat met $f_A^{-1}(0) = A$. Hint: $\frac{f_A}{f_A + f_B}$.

(iii) $\langle 2 \rangle$ Bewijs dat elke deelruimte van een T_6-ruimte T_6 is en concludeer $T_6 \Rightarrow T_5$. (T_5 of 'volledige normaliteit' was onderwerp van een huiswerk opgave.) Hint: (ii).

(iv) $\langle 1 \rangle$ Bewijs dat elke metrische ruimte T_6 is. Hint: (ii).

(v) $\langle 2 \rangle$ Zij $f \in C(X, [0, \infty))$ en $A = f^{-1}(0)$. Bewijs dat A gesloten is en zich laat schrijven als doorsnede van aftelbaar veel open verzamelingen. Zo'n verzameling heet G_δ-verzameling.

(vi) $\langle 2 \rangle$ Zij X normaal en $A \subset X$ een G_δ-verzameling. Construeer een functie $f_A \in C(X, [0, \infty))$ met $f_A^{-1}(0) = A$. Hint: Urysohn.

(vii) $\langle 1 \rangle$ Concludeer: Een ruimte is T_6 d.e.s.d.a. hij T_4 is en elke gesloten deelverzameling G_δ is.

Opgave 5 (9 pt) Zij $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ een veelterm van orde $n \geq 1$. We mogen aannemen dat $a_n = 1$. Neem aan dat P geen nulpunten heeft, dus $P(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$. In wat volgt schrijven we $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(i) $\langle 2 \rangle$ Voor $R \geq 0$ definieer

$$f_R : S^1 \to S^1, \quad z \mapsto \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}.$$

Gebruik dit om te bewijzen dat f_1 homotoop is aan een constante afbeelding $S^1 \to S^1$.

(ii) $\langle 3 \rangle$ Definieer $g : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ door

$$g(z,t) = \begin{cases} f_{1/t}(z) & \text{als} \quad t \in (0,1] \\ z^n & \text{als} \quad t = 0 \end{cases}$$

Bewijs dat g een homotopie is tussen f_1 en de afbeelding $z \mapsto z^n$.

(iii) $\langle 1 \rangle$ Bewijs dat de afbeelding $z \mapsto z^n$ homotoop is aan een constante afbeelding.

(iv) $\langle 3 \rangle$ Bewijs dat (iii) niet waar is, en leg uit waarom dit de hoofdstelling van de algebra oplevert. (Merk op dat $n > 0$ per aanname en gebruik de overdekkingsafbeelding $p : \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$).

Oplossingen

Oplossing 1 (i) We berekenen

$$\begin{aligned}(A\times B)^0 &= \bigcup\{U\subset\tau_{X\times Y}\mid U\subset A\times B\}\\ &= \bigcup\{V\times W\mid V\in\tau_X, W\in\tau_Y, V\times W\subset A\times B\}\\ &= \bigcup\{V\in\tau_X\mid V\subset A\}\times\bigcup\{W\in\tau_Y\mid W\subset B\}\\ &= A^0\times B^0.\end{aligned}$$

(De eerste en vierde gelijkheden zijn de definitie van het inwendige, de tweede volgt uit de definitie van de producttopologie en de derde is triviaal.)

$\overline{A}\times\overline{B}$ is gesloten en bevat $A\times B$. Met de definitie $\overline{A}=\bigcap\{C\mid C \text{ gesloten}, C\supset A\}$ volgt hieruit dat $\overline{A\times B}\subset\overline{A}\times\overline{B}$. Zij nu $(x,y)\in\overline{A}\times\overline{B}$ en zij W een open omgeving van (x,y). Met de definitie van de product-topologie volgt dat er open omgevingen $x\in U\subset X, y\in V\subset Y$ zijn zodat $U\times V\subset W$. Uit $(x,y)\in\overline{A}\times\overline{B}$ volgt $(U\times V)\cap(A\times B)\neq\emptyset$ en dus natuurlijk ook $W\cap(A\times B)\neq\emptyset$. Dus $(x,y)\in\overline{A\times B}$.

Met de definitie van ∂ en de eerdere beweringen berekenen wij

$$\partial(A\times B)=\overline{A\times B}-(A\times B)^0=\overline{A}\times\overline{B}-A^0\times B^0.$$

Dus: $\partial(A\times B)$ bestaat uit punten $(x,y)\in\overline{A}\times\overline{B}$ waar $x\notin A^0$ of $y\notin B^0$. In het eerste geval geldt $x\in\overline{A}-A^0=\partial A$, dus $(x,y)\in\partial A\times\overline{B}$, en in het tweede geval $(x,y)\in\overline{A}\times\partial B$.

(ii) Twee mogelijke aanpakken: (a) We hebben

$$\prod_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}\pi_i^{-1}(A_i).$$

De projecties π_i zijn continu en de $A_i\subset X_i$ gesloten, dus elk $\pi_i^{-1}(A_i)\subset X$ is gesloten. Een willekeurige doorsnede van gesloten verzamelingen is gesloten, dus $\prod_i A_i$ is gesloten.

(b) Een punt $x=(x_i)_{i\in I}$ van $X=\prod_i X_i$ is in $A=\prod_i A_i$ als $x_i\in A_i$ voor elk i. Dus

$$X-\prod_i A_i=\bigcup_{i\in I}\{x\in X\mid x_i\notin A_i\}=\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(X_i-A_i).$$

Elk A_i is gesloten, dus X_i-A_i is open en evenzo $\pi_i^{-1}(X_i-A_i)$. Een willekeurige vereniging van open verzamelingen is open, dus $X-\prod_i A_i$ is open, dus $\prod_i A_i$ gesloten.

Oplossing 2 (i) Reflexiviteit van $\sim$ volgt uit het feit dat $\{x\}$ samenhangend is voor elk x. Symmetrie is duidelijk. Als $x\sim y\sim z$ dan zijn er samenhangende verzamelingen $S,T\subset X$ met $\{x,y\}\subset S, \{y,z\}\subset T$. Gezien $S\cap T\ni y$ en GG, Stelling 8.2, volgt dat $S\cup T$ samenhangend is. Uit $\{x,z\}\subset S\cup T$ volgt $x\sim z$, dus transitiviteit van $\sim$.

(ii) We moeten bewijzen dat $\pi_0(X)$ geen samenhangende deelruimtes van meer dan een punt heeft. Zij $p:X\to\pi_0(X)$ de quotientenafbeelding en zij $S\subset\pi_0(X)$ met $\#S\geq 2$. Dan is $p^{-1}(S)\subset X$ een vereeniging van minstens twee samenhangscomponenten van X en dus niet samenhangend. Er is dus een clopen $T\subset p^{-1}(S)$ met $\emptyset\neq T\neq p^{-1}(S)$. Dit T is self een vereniging van samenhangscomponenten van X. (Stel $Y\subset X$ is samenhangend met $Y\cap T$ en $Y-T$ beide niet leeg. Dan is Y de vereniging van twee niet-lege clopen deelverzamelingen, wat de samenhang weersprekt.) Dus $T=p^{-1}(p(T))$. Met de definitie van de quotiententopologie is duidelijk dat een deelverzameling Z van $\pi_0(X)$ clopen is d.e.s.d.a. $p^{-1}(Z) \subset X$ clopen is. Gezien $T = p^{-1}(p(T))$ en het feit dat T clopen is volgt dus dat $p(T)$ clopen is. Het is duidelijk dat $p(T) \subset S$ met $\emptyset \neq p(T) \neq S$, dus S is niet samenhangend, wat te bewijzen was.

(iii) Als X totaal niet samenhangend is dan heeft X geen samenhangende deelverzamelingen met meer dan een punt. Dus $x \sim y$ geldt alleen als $x = y$. Maar dan is $p : X \to \pi_0(X)$ een bijectie en met de definitie van de quotiententopologie ook een homeomorfisme. En als p een homeomorfisme is dan volgt uit (ii) dat X totaal niet-samenhangend is (want deze eigenschap is behouden onder homeomorfismes.)

Oplossing 3 (i) Een product van Hausdorff ruimtes is Hausdorff. Zij X, Y locaal compact en $(x, y) \in X \times Y$. x heeft een omgeving $U \subset X$ met $\overline{U}$ compact en y heeft een omgeving $V \subset Y$ met $\overline{V}$ compact. Nu is $U \times V$ een omgeving van (x, y) en met Opgave 1 geldt $\overline{U \times V} = \overline{U} \times \overline{V}$. $\overline{U}, \overline{V}$ zijn compact, en een product van compacte verzamelingen ook. Dus: $X \times Y$ is locaal compact.

(ii) We hebben $\widehat{X} \times \widehat{Y} = (X \cup \{\infty_X\}) \times (Y \cup \{\infty_Y\})$ en $\widehat{X \times Y} = X \times Y \cup \{\infty\}$. Daarom ligt het voor de hand om een afbeelding $p : \widehat{X} \times \widehat{Y} \to \widehat{X \times Y}$ te definieren door $p(x, y) = (x, y)$ als $(x, y) \in X \times Y$ en $p(x, \infty_Y) = p(\infty_X, y) = p(\infty_X, \infty_Y) = \infty$. Het is duidelijk dat p surjectief is. Om te conluderen dat p een quotientenafbeeling is moeten we laten zien dat een deelverzameling $C \subset \widehat{X \times Y}$ open is (mbt de topologie op $\widehat{X \times Y}$ gegeven door de een-puntscompactificatie van de productruimte $X \times Y$) d.e.s.d.a. $p^{-1}(C) \subset \widehat{X} \times \widehat{Y}$ open is (mbt de producttopologie op het product van de een-punt compactificaties).

Zij $C \subset \widehat{X \times Y}$. Neem eerst aan dat $\infty \notin C$, dus $C \subset X \times Y$. Dan is $p^{-1}(C) = C$, de rechterkant bekeken als deelverz. van $X \times Y \subset \widehat{X} \times \widehat{Y}$. Per definitie is C open in $\widehat{X \times Y}$ desda $C \subset X \times Y$ open is. Maar de topologie op $X \times Y$, bekeken als deelruimte van $\widehat{X} \times \widehat{Y}$ is de gewone producttopologie. Dus als $\infty \notin C \subset \widehat{X \times Y}$ geldt C open d.e.s.d.a. $p^{-1}(C)$ open.

Zij nu $\infty \in C$. Met de definitie van de topologie op $\widehat{X \times Y}$ geldt dat C open in $\widehat{X \times Y}$ desda $\widehat{X \times Y} - C = X \times Y - (C - \{\infty\}$ compact is in $X \times Y$. Nu is

$$p^{-1}(\widehat{X \times Y} - C) = (\widehat{X} \times \widehat{Y}) - p^{-1}(C) = (X \times Y) - p^{-1}(C) = X \times Y - (C - \{\infty\})$$

Dus ook in het geval $\infty \in C \subset \widehat{X \times Y}$ geldt dat C open is d.e.s.d.a. $p^{-1}(C) \subset \widehat{X} \times \widehat{Y}$ open is.

Oplossing 4 (i) Dit is standaard: Als A, B disjunct en gesloten, kies een functie f zoals in de definitie. Dan zijn $U = f^{-1}([0, 1/3)), V = f^{-1}((2/3, 1])$ disjuncte open verzamelingen met $A \subset U, B \subset V$. Dus X is normaal. Als X normaal is en A, B disjunct en gesloten dan geeft het Lemma van Urysohn een functie $f \in C(X, [0, 1])$ met $f^{-1}(0) \supset A$ en $f^{-1}(1) \supset B$, maar het is niet duidelijk dat we $\supset$ door $=$ kunnen vervangen.

(ii) Stel X is T_6 en $A \subset X$ gesloten. Als $A = X$ dan werkt $f_A \equiv 0$. Als $A \neq X$, kies $x \in X - A$. Omdat X T_1 is is $B = \{x\}$ gesloten. De T_6-eigenschap geeft een functie $f \in C(X, [0, 1])$ met $f^{-1}(0) = A, f^{-1}(1) = B = \{x\}$, en we zijn klaar. Andersom, stel voor elk gesloten $A \subset X$ is er een functie f_A zoals aangegeven. Als A, B disjunct en gesloten zijn, definieer $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x) + f_B(x)}$. De noemer is nul als $f_A(x) = f_B(x) = 0$, dus als $x \in A \cap B$, dus nergens. Dus f is continu met waarden in $[0, 1]$, gelijk aan nul precies op A en gelijk aan 1 waar $f_B = 0$, dus precies op B.

(iii) Zij X T_6 en $Y \subset X$. Als $A \subset Y$ gesloten (in de relative topologie), dan is $A = B \cap Y$ met $B \subset X$ gesloten. Omdat X T_6 is, bestaat $f_B \in C(X, [0, \infty))$ met $f_B^{-1}(0) = B$. Nu geldt $f_B \restriction Y \in C(Y, [0, \infty))$ en $(f_B \restriction Y)^{-1}(0) = B \cap Y = A$.

(iv) Zij (X,d) metrisch en $A \subset X$ gesloten. Definieer $f_A(x) = d(A,x) = \inf_{y\in A} d(x,y)$. Natuurlijk is $f_A(x) = 0$ als $x \in A$. Als $f_A(x) = 0$, dan bevat elke omgeving van x een punt van A, dus $x \in \overline{A}$. Maar A is gesloten, dus $x \in A$. Hiermee geldt $f_A^{-1}(0) = A$, en met (ii) volgt dat X T_6 is.

(v) Als $f \in C(X,[0,\infty))$ en $A = f^{-1}(0)$, dan is A gesloten vanwege continuiteit. De verzamelingen $U_n = f^{-1}([0,1/n))$ zijn open en $A = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$. Dus A is G_δ.

(vi) Zij $A \subset X$ G_δ, dus A gesloten en $A = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ met U_n open. Als $A = \emptyset$, dan geeft $f_A \equiv 1$ dat $f_A^{-1}(0) = \emptyset = A$. Zij dus $A \neq \emptyset$. Uit $A \subset U_n$ $\forall n$ volgt dat A en $B_n = X - U_n$ disjuncte gesloten verzamelingen zijn. Omdat X normaal is bestaan met Urysohn functies $f_n \in C(X,[0,1])$ met $f_n \restriction A = 0$ en $f_n \restriction B_n = 1$. Definieer

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x).$$

Als $x \in A$ dan geldt $f_n(x) = 0$ voor alle n, dus $f(x) = 0$. Als $x \notin A = \cap_n U_n$, dan is er een n zodat $x \notin U_n$, dus $x \in B_n = X - U_n$. Dan is $f_n(x) = 1$ en dus $f(x) \geq 2^{-n}$. Dus $f^{-1}(0) = A$.

(vii) Dit is gewoon de combinatie van (v) en (vi).

Oplossing 5 (i) De afbeelding $[0,\infty) \times S^1 \to S^1, (R,z) \mapsto f_R(z)$ is continu, want $(R,z) \mapsto Rz$ is continu, P is continu, en de noemer wordt nergens nul per aanname. De functie f_0 heeft de constante waarde $P(0)/|P(0)|$ en $(z,t) \mapsto f_t(z)$ is een homotopie tussen f_0 en f_1.

(ii) Per definitie geldt $g(z,0) = z^n$ en $g(z,1) = f_1(z)$. Om te concluderen dat g een homotopie tussen deze twee functies is moeten we bewijzen dat $g(z,t)$ continu is. Voor $t > 0$ is dit duidelijk, maar voor $t = 0$ niet. Voor $t > 0$ geldt

$$\begin{aligned} g(z,t) = f_{1/t}(z) = \frac{P(z/t)}{|P(z/t)|} &= \frac{\left(\frac{z}{t}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{z}{t}\right)^{n-1} + \cdots + a_0}{\left|\left(\frac{z}{t}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{z}{t}\right)^{n-1} + \cdots + a_0\right|} \\ &= \frac{z^n + a_{n-1}z^{n-1}t + \cdots + a_0 t^n}{|z^n + a_{n-1}z^{n-1}t + \cdots + a_0 t^n|} \end{aligned}$$

Hieruit is duidelijk dat $\lim_{t\to 0} g(z,t) = z^n/|z^n| = z^n$ voor alle $z \in S^1$. Deze puntsgwijze convergentie is niet voldoende om te concluderen dat $g \in C(S^1 \times [0,1], S^1)$. Maar in feite is de convergentie voor $t \to 0$ uniform tov z, waaruit volgt dat $g(z,t)$ overal op $S^1 \times [0,1]$ continu is. Hiermee is g een homotopie tussen f_1 en $z \mapsto z^n$.

(iii) Als f_1 homotoop is aan de constante functie $P(0)/|P(0)|$ en aan $z \mapsto z^n$, dan zijn de laatste twee functies homotoop, want homotopien kunnen we samenstellen.

(iv) Een functie $f : S^1 \to X$ is hetzelfde als een lus in X. Onder deze identificatie correspondeert $z \mapsto z^n$ met de pad $I \to S^1, x \mapsto e^{2\pi i n x}$. De lift (met beginpunt 0) van deze functie naar de overdekkingsruimte $\mathbb{R}$ is gegeven door $I \to \mathbb{R}, x \mapsto nx$. Voor verschillende $n \in \mathbb{N}$ hebben deze gelifte paden alle beginpunt 0, maar eindpunt n. Met de homotopie-liftingstelling volgt dat de lussen $x \mapsto e^{2\pi i n x}$ in S^1 voor verschillende $n \in \mathbb{Z}$ niet homotoop zijn. Dit is de gewensde contradictie.