Hertentamen Voortgezette Kansrekening

Vrijdag 13 mei 2011; 14:00–17:00.

Schrijf boven elk vel je naam en studentnummer.

1. Laten X en Y continue stochastische variabelen zijn met gezamenlijke kansdichtheid gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{als } 0 \le x \le y \le 2; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   (a) Bereken de marginale kansdichtheden f_1 en f_2.

   (b) Bereken de covariantie en de correlatiecoëfficiënt van X en Y.

   (c) Wat is de voorwaardelijke kansdichtheid $f(y|x)$?

   (d) Bepaal de voorwaardelijke verwachting $\mathbb{E}(Y|x)$.

2. Laten λ en μ positieve getallen zijn, en $n \in \mathbb{N}$ zó dat $n \ge \lambda, \mu$. De stochasten X, Y en Z zijn gezamenlijk multinomiaal verdeeld met parameters $(n, \lambda/n, \mu/n)$.

   (a) Bepaal de varianties van X, Y en $X+Y$.

   (b) Bepaal de covariantie van X en Y. (Aanwijzing: gebruik (a).)

   (c) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

   Kun je een intuitieve verklaring geven voor het resultaat in (c)?

3. De stochasten X en Y zijn exponentieel verdeeld met parameter $\frac{1}{2}$. Bepaal in 4 decimalen de kans dat de veeltermfunctie $t \mapsto t^2 + Xt + Y$ reële nulpunten heeft.
   (*Aanwijzing: gebruik Tabel 3 van de standaard-normale verdelingsfunctie* Φ.)

4. Welke van de onderstaande beweringen zijn juist voor alle keuzes van de stochasten X en Y? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   (a) $X \perp\!\!\!\perp Y$ dan en slechts dan als $X^2 \perp\!\!\!\perp Y^2$.

   (b) Als voor de gezamenlijke dichtheden van X en Y geldt: $f_{X,Y} = f_{Y,X}$, dan geldt hetzelfde voor de voorwaardelijke dichtheden: $f_{X|Y} = f_{Y|X}$.

   (c) Als X en Y onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld, dan is ook $X + Y - |X - Y|$ exponentieel verdeeld.

   (d) Als X en Y onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld, dan is ook $X + Y + |X - Y|$ exponentieel verdeeld.