Tentamen Voortgezette Kansrekening

Vrijdag 28 januari 2011; 14:00–17:00.

Schrijf boven elk vel je naam en studentnummer.

1. Laten X en Y continue stochastische variabelen zijn met gezamenlijke kansdichtheid gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{24}{5}xy & \text{als } 0 \leq x, y \leq 1 \text{ en } x + y \geq 1; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   (a) Zijn X en Y onafhankelijk? Verklaar je antwoord.
   (b) Bereken de kans dat $Y \geq X - \frac{1}{3}$.
   (c) Bepaal de marginale dichtheidsfunctie van X.
   (d) Bepaal de functie g waarvoor geldt: $g(Y) = \mathbb{E}(X|Y)$.
   (e) Bereken de variantie van $\mathbb{E}(X|Y)$.

2. Op een bepaald kruispunt gebeuren ongelukken volgens een Poisson-proces met een frequentie van twee per jaar.
   (a) Wat is de kans dat er onder de komende 6 (kalender-)jaren er precies twee (niet noodzakelijk achtereenvolgende) jaren vóórkomen waarin geen ongelukken plaatsvinden?
   (b) Wat is de kans dat er onder de eerstvolgende 12 ongelukken er twee opeenvolgende zullen zijn met een tussenpoze van minstens 2 jaar?
   (c) Wat is de kans dat er in de komende 6 kalenderjaren er minstens twee opeenvolgende zullen zijn zonder ongelukken?

3. In een winkel komen klanten binnen volgens een Poisson-proces met een gemiddelde van λ klanten per dag. In het kader van een reclame-actie werpt elke klant aan de kassa drie munten op, en krijgt voor elke keer dat hij "kop" gooit een waardebon uitgereikt.
Op zekere dag komen er N klanten in de winkel, die samen W waardebonnen meekrijgen. (N en W zijn stochastische variabelen.) Dus als $N = 0$ is ook $W = 0$; en als $N > 0$, dan geldt dat $W = Y_1 + \cdots + Y_N$, waarbij Y_j het aantal keren "kop" aangeeft dat klant nummer j werpt. We zijn geïnteresseerd in het gemiddelde en de variantie van W.
   (a) Bepaal de Momentgenererende functie M_N van het klantenaantal N, en de momentgenererende functie M_Y van het aantal keren kop in drie muntworpen.
   (b) Laat zien dat de momentgenererende functie M_W van W gegeven wordt door: $M_W = M_N \circ M_Y$.
   Hint: Bedenk dat $\mathbb{E}(e^{tW}) = \mathbb{P}[N = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[N = n] \cdot \mathbb{E}\left(e^{t(Y_1+\ldots+Y_n)}\right)$.
   (c) Bereken hiermee $\mathbb{E}(W)$ en $\text{Var}(W)$.

4. Welke van de onderstaande beweringen zijn juist? Geef bij de onjuiste beweringen een tegenvoorbeeld. Beargumenteer voor de juiste beweringen waarom ze waar zijn.
   (a) $X \perp\!\!\!\perp Y$ en $X \perp\!\!\!\perp Z$ impliceert dat $X \perp\!\!\!\perp YZ$.
   (b) $\text{Cov}(X, Y) = 0$ impliceert $X \perp\!\!\!\perp Y$.
   (c) Als $X \geq Y$, dan is $\text{Var}(X) \geq \text{Var}(Y)$.
   (d) Als $\text{Var}(X) \leq 1$ en $\text{Var}(Y) \leq 1$, dan is $\text{Cov}(X, Y) \leq 1$.