Tentamen Voortgezette Kansrekening (WB006C)

- *Het is een* **open boek** *tentamen. Gebruik van een rekenmachine of andere hulpmiddelen is* **niet** *toegestaan.*
- *Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.*
- *Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Deel je tijd verstandig in.*
- *Schrijf leesbaar. Geef voldoende uitleg bij je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden niet goed gekeurd.*

Opgave 1
Laat X en Y stochasten zijn met gezamenlijke kansdichtheidsfunctie (pdf) gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{als } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

(a) Bereken de marginale kansdichtheidsfuncties f_X van X en f_Y van Y. Zijn X en Y onafhankelijk?

(b) Bepaal de kansdichtheidsfunctie van $X + Y$.
Hint: Gebruik formule (6.4.1) uit het boek.

(c) Bereken de voorwaardelijke pdf $f_{X|Y}(x|y)$ en de verwachtingswaarde $\mathbb{E}(X|Y)$.

Opgave 2
Laat X_1 en X_2 onafhankelijke exponentieel verdeelde stochasten zijn, beide met parameter $\theta = 1$ ($X_1, X_2 \sim$ EXP(1)). Definieer $Y_1 = X_1 + X_2$ en $Y_2 = e^{X_1}$.

(a) Schets de waardeverzameling van het paar (Y_1, Y_2) in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bepaal de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie f_{Y_1,Y_2} van Y_1 en Y_2.

(c) Bepaal de marginale kansdichtheidsfuncties f_{Y_1} van Y_1 en f_{Y_2} van Y_2.
Hint: Dit is mogelijk zonder de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie f_{Y_1,Y_2} te gebruiken.

Opgave 3
Zij $X_1, X_2, \ldots$ een steekproef (random sample); geef de verwachtingswaarde en variantie van de stochasten X_i, $i = 1, 2, \ldots$, aan met μ_X en σ_X^2. Bekijk de som $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, waarbij de lengte van de som N een discrete stochast is met waardeverzameling $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Neem aan dat N onafhankelijk is van X_i voor elke i. Druk $\mathbb{E}(Y)$ en Var(Y) uit in μ_X, σ_X, $\mu_N = \mathbb{E}(N)$ en $\sigma_N = \sqrt{\text{Var}(N)}$.
Hint: Bepaal eerst $\mathbb{E}(Y|N)$ en Var$(Y|N)$.

Z.O.Z.

Opgave 4

Beschouw twee steekproeven (random samples) $U_1, U_2, \ldots$ en $V_1, V_2, \ldots$, met U_i uniform verdeeld op $(0,1)$ ($U_i \sim$ UNIF$(0,1)$), V_j exponentieel verdeeld met parameter $\theta = 1$ ($V_j \sim$ EXP(1)) en met U_i en V_j onafhankelijk voor alle i en j. Definieer nu een nieuwe rij stochasten $X_1, X_2, \ldots$ als volgt: We gooien éénmalig met een zuivere munt ($\mathbb{P}(\text{Kop}) = \mathbb{P}(\text{Munt}) = \frac{1}{2}$), onafhankelijk van de stochasten U_i en V_j. Als Kop boven komt dan definiëren we $X_i = U_i$ voor alle i; als Munt boven komt dan definiëren we $X_i = V_i$ voor alle i.

(a) Laat zien dat $\mathbb{E}(X_i) = \frac{3}{4}$ voor alle i.

(b) Definieer $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Bewijs dat voor $\varepsilon < \frac{1}{4}$ de kansen

$$\mathbb{P}\left[\left|Y_n - \frac{3}{4}\right| > \varepsilon\right]$$

niet naar 0 convergeren als $n \to \infty$.

(c) Leg uit waarom (b) niet in strijd is met de Wet van de Grote Aantallen.

Oplossing Opgave 1 (25pt)

(a) Er geldt

$$f_X(x) = \int_x^1 8xy\,dy = \left[4xy^2\right]_{y=x}^{y=1} = 4x(1-x^2), \quad (x \in (0,1))$$
$$f_Y(y) = \int_0^y 8xy\,dy = \left[4x^2y\right]_{x=0}^{x=y} = 4y^3, \quad (y \in (0,1)).$$

X en Y zijn niet onafhankelijk; dit volgt direct uit de vorm van het domein van f.

(b) Definieer $Z = X + Y$. Er geldt $f(t, z-t) \neq 0$ d.e.s.d.a.

$$0 \le t \le z - t \le 1 \iff t \ge 0,\ z \ge 2t,\ 1 + t \ge z \iff z/2 \ge t \ge \max\{0, z-1\}.$$

Bij het toepassen van formule (6.3.1) moeten we dus onderscheid maken tussen $z \in (0,1]$ en $z \in (1,2)$. Voor $z \in (0,1]$:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t, z-t)\,dt = \int_0^{z/2} 8t(z-t)\,dt = \int_0^{z/2} 8zt - 8t^2\,dt = \left[4zt^2 - \frac{8}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=z/2} = \frac{2}{3}z^3.$$

En voor $z \in (1,2)$:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t, z-t)\,dt = \int_{z-1}^{z/2} 8t(z-t)\,dt = \left[4zt^2 - \frac{8}{3}t^3\right]_{t=z-1}^{t=z/2} = \frac{-2}{3}z^3 + 4z - \frac{8}{3}.$$

(c) Per definitie geldt, voor elke $y \in [0,1]$:

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2x}{y^2}, \quad (x \in [0,y]).$$

Dan

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \int_0^y x \cdot \frac{2x}{y^2}\,dx = \int_0^y \frac{2x^2}{y^2}\,dx = \left[\frac{2x^3}{3y^2}\right]_{x=0}^{x=y} = \frac{2}{3}y.$$

En dus $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{2}{3}Y$.

Oplossing Opgave 2 (25pt)

(a) Dit is het gebied

$$\mathcal{G} = \{(y_1, y_2) \,|\, y_2 \ge 1,\ y_1 \ge \log y_2\}.$$

(b) De overgang van (X_1, X_2) naar (Y_1, Y_2) gaat via

$$\psi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathcal{G}, \quad \psi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, e^{x_1}) \ \ ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2)$$

met inverse

$$\psi^{-1} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+^2, \quad \psi^{-1}(y_1, y_2) = (\log y_2, y_1 - \log y_2) \ \ ((y_1, y_2) \in \mathcal{G}).$$

Nu passen we Stelling 6.3.6 toe, waarbij de Jacobiaan gegeven wordt door

$$J_{\psi^{-1}}(y_1, y_1) = \det \begin{pmatrix} 0 & y_2^{-1} \\ 1 & -y_2^{-1} \end{pmatrix} = -y_2^{-1}.$$

Er volgt dat de gezamenlijke pdf gegeven wordt door

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)(\psi^{-1}(y_1, y_2)) \cdot |J_{\psi^{-1}}(y_1, y_2)| = e^{-(\log y_2 + (y_1 - \log y_2))} y_2^{-1} = e^{-y_1} y_2^{-1}.$$

(c) De marginale pdf's zijn te berekenen uit de gezamenlijke pdf, of direct uit de definities. De stochast Y_1 is de som van twee onafhankelijke EXP(1)-verdeelde, en dus GAM$(1,1)$-verdeeld. Dan volgt uit Voorbeeld 6.4.6 dat $Y_1 \sim$ GAM$(1,2)$. Met Stelling 6.3.2 volgt dat

$$f_{Y_2}(y) = f_{X_1}(\log y)\left|\frac{1}{y}\right| = e^{-\log y}\frac{1}{y} = \frac{1}{y^2} \quad (y \in (1,\infty)).$$

Oplossing Opgave 3 **(20pt)** Als we de lengte van de som vastleggen op n, volgt uit de onafhankelijkheid van $X_1, X_2, \ldots$ dat

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y|N=n) &= \mathbb{E}(X_1+\cdots+X_n) = \mathbb{E}(X_1)+\cdots\mathbb{E}(X_n) = n\mu_X.\\ \text{Var}(Y|N=n) &= \text{Var}(X_1+\cdots+X_n) = \text{Var}(X_1)+\cdots\text{Var}(X_n) = n\sigma_X^2.\end{aligned}$$

Er volgt dus dat

$$\mathbb{E}(Y|N) = N\mu_X, \quad \text{Var}(Y|N) = N\sigma_X^2.$$

Nu passen we de Wet van de Totale Verwachting (Stelling 5.4.1) en de Wet van de Totale Variantie (Stelling 5.4.3) toe en vinden:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}_N(\mathbb{E}(Y|N)) = \mathbb{E}_N(N\mu_X) = \mu_N\mu_X.\\ \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}_N(\text{Var}(Y|N)) + \text{Var}_N(\mathbb{E}(Y|N)) = \mathbb{E}_N(N\sigma_X^2) + \text{Var}_N(N\mu_X) = \mu_N\sigma_X^2 + \mu_X^2\sigma_N^2.\end{aligned}$$

Oplossing Opgave 4 **(30pt)** Definieer de stochast Z door:

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{Kop gegooid} \\ 0 & \text{Munt gegooid} \end{cases}$$

(a) Met de Wet van de Totale Verwachting volgt dat

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i) &= \mathbb{E}(X_i|Z=1)\mathbb{P}[Z=1] + \mathbb{E}(X_i|Z=0)\mathbb{P}[Z=0]\\ &= \mathbb{E}(U_i)\frac{1}{2} + \mathbb{E}(V_i)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 3/4.\end{aligned}$$

(b) Definieer

$$\overline{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i, \quad \overline{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V_i.$$

Dan $\mathbb{E}(\overline{U_n}) = \mathbb{E}(U_1) = 1/2$ en $\mathbb{E}(\overline{V_n}) = \mathbb{E}(V_1) = 1$. Met de wet op de totale kans volgt dat

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|Y_n - \frac{3}{4}\right| > \varepsilon\right] &= \mathbb{P}\left[\left|Y_n - \frac{3}{4}\right| > \varepsilon | Z=1\right]\mathbb{P}[Z=1] + \mathbb{P}\left[\left|Y_n - \frac{3}{4}\right| > \varepsilon | Z=0\right]\mathbb{P}[Z=0]\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left[\left|\overline{U}_n - \frac{3}{4}\right| > \varepsilon\right] + \mathbb{P}\left[\left|\overline{V}_n - \frac{3}{4}\right| > \varepsilon\right]\right).\end{aligned}$$

Met de Wet van de Grote Aantallen volgt dat $\overline{U}_n \xrightarrow{p} 1/2$ en $\overline{V}_n \xrightarrow{p} 1$. Hiermee zien we dat voor elke $\varepsilon \in (0, 1/4)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\overline{U}_n - \frac{3}{4}\right| > \varepsilon\right] &= 1 - \mathbb{P}\left[\left|\overline{U}_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \mathbb{P}\left[\left|\overline{U}_n - \frac{1}{2}\right| < (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) - \varepsilon\right]\\ &= 1 - \mathbb{P}\left[\left|\overline{U}_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4} - \varepsilon\right] \to 1,\end{aligned}$$

en opvergelijkbare manier

$$\mathbb{P}\left[\left|\overline{V}_n - \frac{3}{4}\right| > \varepsilon\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\left|\overline{V}_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \mathbb{P}\left[\left|\overline{V}_n - 1\right| < (1 - \frac{3}{4}) - \varepsilon\right]$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left[\left|\overline{V}_n - 1\right| < \frac{1}{4} - \varepsilon\right] \to 1,$$

In het bijzonder volgt dat voor elke $\varepsilon < 1/4$:

$$\mathbb{P}\left[\left|Y_n - \frac{3}{4}\right| > \varepsilon\right] \to 1.$$

(c) De Wet van de Grote Aantallen is hier niet van toepassing omdat de rij stochasten $X_1, X_2, \ldots$ niet onafhankelijk zijn.